



Recherche et utilisation de méthodes analytiques inverses pour des problèmes couplés thermo élastiques

Daniel Weisz-Patrault

► To cite this version:

Daniel Weisz-Patrault. Recherche et utilisation de méthodes analytiques inverses pour des problèmes couplés thermo élastiques. Autre. Université Paris-Est, 2012. Français. <NNT : 2012PEST1171>. <tel-00796446v3>

HAL Id: tel-00796446

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00796446v3>

Submitted on 9 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST
ECOLE DOCTORALE SCIENCE INGÉNIERIE ET ENVIRONNEMENT

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences de l'Université Paris-Est
par

Daniel Weisz-Patrault

RECHERCHE ET UTILISATION DE SOLUTIONS ANALYTIQUES POUR DES PROBLÈMES INVERSES COUPLÉS THERMO-ÉLASTIQUES

FINDING AND USING ANALYTICAL SOLUTIONS FOR INVERSE COUPLED
THERMO-ELASTIC PROBLEMS

Thèse soutenue publiquement le 5 décembre 2012 devant le jury composé de :

M.	MARC BONNET	<i>Rapporteur</i>
Mme.	HÉLÈNE DUMONTET	<i>Rapporteur</i>
M.	NICOLAS LEGRAND	<i>Examineur</i>
M.	DOMINIQUE FRANÇOIS	<i>Président</i>
M.	ALAIN EHRLACHER	<i>Directeur de thèse</i>

Thèse réalisée au Laboratoire Navier (UMR 8205), CNRS, Ecole des Ponts ParisTech

**RECHERCHE ET UTILISATION DE SOLUTIONS
ANALYTIQUES POUR DES PROBLÈMES
INVERSES COUPLÉS THERMO-ÉLASTIQUES**

A la mémoire de mon grand-père
Michel Weisz

D. WEISZ-PATRAULT

**RECHERCHE ET UTILISATION DE SOLUTIONS
ANALYTIQUES POUR DES PROBLÈMES INVERSES
COUPLÉS THERMO-ÉLASTIQUES**

DE LA THÉORIE DES POTENTIELS POUR UNE MÉTROLOGIE MODERNE EN
CONTEXTE INDUSTRIEL



REMERCIEMENTS

Alain Ehrlacher aura d'abord été mon professeur, puis le directeur de mes travaux. Mais il est surtout devenu un véritable interlocuteur, avec qui je partage cet intérêt tout particulier pour les solutions analytiques, et je crois aussi pour une certaine conception des sciences. Je me rappelle que notre premier échange à propos des fonctions holomorphes a rapidement dévié sur le principe de réfutabilité en science. C'est un réel plaisir que de lui exprimer ma gratitude pour son enseignement si riche, ses conseils, son soutien et la confiance qu'il m'a accordée.

Je remercie et je salue Nicolas Legrand d'ArcelorMittal, qui est aussi l'une des rencontres scientifiques les plus enrichissantes que j'ai faites. Il a été d'une remarquable clairvoyance, quant à l'utilisation des outils analytiques, dans les problématiques liées à l'industrie du laminage. Je le remercie de s'être intéressé à mes travaux en m'associant au projet européen qu'il coordonne, et en alimentant constamment mes recherches par des problèmes industriels nouveaux.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Marc Bonnet et Hélène Dumontet d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Leurs appréciations m'ont fait très plaisir, et leurs critiques avisées ont enrichi ma compréhension du sujet.

Enfin, ce fut un très grand plaisir que Dominique François ait présidé le jury de ma soutenance de thèse, tant du point de vue intellectuel (je le remercie particulièrement pour nos conversations sur la mécanique de la rupture) que du point de vue personnel, il fut l'ami et voisin d'un ingénieur métallurgiste du CEA se trouvant être mon grand-père.

PRÉFACE

Les concepts abstraits développés en physique sont de nature mathématique. Cette idée majeure de Gaston Bachelard est éclairante pour le travail de recherche en mécanique des solides. En effet, si le modélisateur considérant la matière et ses comportements mécanique et thermique peut avoir tendance à exprimer sa pensée de manière substantialiste, le fait n'en reste pas moins que comprendre des problèmes de mécanique passe par la résolution d'équations aux dérivées partielles. Les mathématiques analytiques permettant de résoudre ces équations sont donc les éléments principaux pour appréhender ces problèmes.

Cependant au cours des dernières décennies, l'essor important des capacités de calcul, a permis de résoudre numériquement des problèmes de plus en plus complexes tant du point de vue géométrique que du point de vue des lois de comportements approchant de plus en plus finement les matériaux connus. Cette capacité à modéliser par des méthodes numériques des systèmes mécaniques de plus en plus complexes avec une grande précision a inévitablement contribué à diminuer l'intérêt, que l'on porte aux solutions analytiques. Jugées trop limitées quant au nombre de problèmes qu'il est possible de résoudre et devenues des cas d'école, leur exactitude mathématique ne compense pas les simplifications qu'il est nécessaire de faire pour obtenir un résultat analytique. Par ailleurs, la théorie des potentiels, qui est utilisée comme outil de résolution analytique pour les problèmes de thermoélasticité linéaire, ne nécessite plus guère de développements mathématiques. Ainsi que l'on se place du point de vue de la résolution pratique des problèmes de mécanique ou du point de vue du mathématicien, la recherche de solutions analytiques peut paraître en déclin.

Or, un très large champ d'application est concerné aujourd'hui par des développements analytiques qui permettront une approche précise et efficace. En effet, les solutions analytiques permettent des temps de calculs très faibles et sont donc indiquées pour des calculs en temps réel. Le développement de capteurs (avec un système d'asservissement) dans l'industrie est un exemple représentatif d'une demande en calculs rapides. De même, de nombreuses méthodes inverses sont développées dans diverses industries pour interpréter différents types de mesures. Mais il faut remarquer que jusqu'à présent, peu de développements analytiques ont été menés à bien dans le secteur des méthodes inverses pour l'industrie. D'une part car les méthodes de résolutions disparaissent de la culture des ingénieurs, d'autre part car l'idée subsiste que tous les problèmes solubles analytiquement ont déjà été publiés. De cette faible utilisation des méthodes analytiques au profit des algorithmes numériques, résulte une grande difficulté à produire des méthodes inverses efficaces, notamment en termes de temps de calcul et de stabilité de l'inversion (exemple de la conception de capteurs pour l'industrie).

Nous le savons, les problèmes inverses sont, en effet, mal posés au sens de Hadamard, et des sujets très classiques de conditionnement de matrices interviennent fréquemment. Les méthodes itératives (utilisant l'algorithme du gradient conjugué par exemple) sont stabilisées par régularisation et sont en outre souvent coûteuses en temps de calcul. Les solutions analytiques dédiées aux problèmes inverses permettent quant à elles une bonne robustesse au fait que le problème est mal posé et assure un calcul très rapide.

Les travaux de thèse exposés dans ce mémoire ont été réalisés dans le cadre d'un projet européen supervisé par ArcelorMittal qui vise à montrer la faisabilité d'un certain nombre de capteurs inverses pour le laminage industriel (contraintes de contact, flux de chaleur entrant, épaisseur d'huile etc...). Ainsi, un certain nombre de problèmes inverses de thermo-élasticité ont été résolus analytiquement. Il est démontré pour chacun d'entre eux une excellente précision et des temps de calculs compatibles pour une interprétation en temps réel. Des études expérimentales ont également été menées sur le laminage pilote du centre de recherche d'ArcelorMittal situé à Maizières-les-Metz.

Ce mémoire de thèse a pour point de départ une série d'articles, que nous avons publiés entre 2011 et 2012. La structure en articles distincts a été respectée, ainsi chaque chapitre peut être lu indépendamment des autres. Les notations ont été harmonisées autant que possible, cependant il a été jugé préférable de les expliciter à chaque

chapitre. Les enjeux industriels et théoriques sont rappelés. L’auteur espère que cela rendra la lecture aisée et utile. En revanche, des paragraphes introductifs ont été ajoutés pour expliciter la cohérence dans l’enchaînement des différents chapitres et donner au texte son unité. Par ailleurs de nombreux ajouts scientifiques ont été faits. En effet, certaines approximations apparaissent dans les articles originaux et se sont avérées inutiles à la lumière de lectures plus avancées sur la résolution analytique de certaines équations.

L’auteur espère que ces travaux de thèse convaincront le lecteur, non seulement que la recherche de solutions analytiques offre la possibilité d’établir de nouveaux résultats, mais encore que ces résultats ne sont pas restreints à leur élégance mathématique mais que ces derniers sont exploitables dans un contexte industriel où l’efficacité et la robustesse sont privilégiées.

Daniel Weisz-Patrault

Paris
26 Octobre 2012

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	i
PRÉFACE	iii
CHAPITRE I. INTRODUCTION	1
1.1 Enjeux	1
1.2 Le procédé de laminage	2
1.3 Modélisation prédictive	3
1.3.1 Contact mécanique	3
1.3.2 Transfert thermique	4
1.4 Capteurs et méthodes inverses	4
1.5 Méthodes inverses appliquées à la métrologie en laminage	6
1.6 Problèmes mal posés	7
1.7 Plan	8
CHAPITRE II. PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES	9
2.1 Avertissement	9
2.2 Mesures et développement en séries	9
2.2.1 Mesures	9
2.2.2 Analyse de Fourier	9
2.2.3 Séries hypergéométriques	11
2.2.4 Fonction Gamma	11
2.2.5 Fonctions de Bessel	11
2.2.6 Analyse de Fourier-Bessel	13
2.2.7 Polynômes orthogonaux	14
2.3 Fonctions harmoniques et bi-harmoniques	17
2.3.1 Harmoniques sphériques	17
2.3.2 Fonctions harmoniques en cylindrique	18
2.3.3 Fonctions harmoniques et bi-harmoniques en deux dimensions	19
2.4 Intégrales de frontière	20
PART A MÉTHODES INVERSES EN DEUX DIMENSIONS	23
CHAPITRE III. THERMO-ELASTICITÉ BIDIMENSIONNELLE	25
3.1 Résultat de Kolosov-Muskhelishvili	25
3.2 Equation de Navier avec second membre	26
3.3 Equation de la chaleur pour un solide tournant à vitesse constante	26
3.4 Famille de solutions	27
3.5 Conclusion	28
3.6 Compléments	29
3.6.1 Dans un domaine élastique simplement connexe	29
3.6.2 Dans un domaine élastique connexe	36
CHAPITRE IV. ÉVALUATION DES CONTRAINTES DE CONTACT	37
4.1 Introduction	37
4.1.1 Principes	37
4.1.2 Fibres optiques	38
4.1.3 Approche mathématique	38

4.2	Analyse inverse	40
4.3	Précision et temps de calcul	40
4.4	Erreur de reconstruction	42
4.5	Critère de troncature	42
4.6	Discussion sur le nombre de points d'interpolation	45
4.7	Validation et comparaison	45
4.7.1	Contraintes prescrites dans l'emprise	45
4.7.2	Mesures simulées	45
4.7.3	Résultats sans bruit de mesure	47
4.8	Bruit de mesure	51
4.9	Conclusion	52
CHAPITRE V. ÉVALUATION DE LA TEMPÉRATURE ET DES FLUX		55
5.1	Introduction	55
5.1.1	Problème thermique	55
5.1.2	Modèles prédictifs	55
5.1.3	Objectifs du chapitre	56
5.1.4	Méthodes inverses et interprétation de mesures	56
5.1.5	Choix de la méthode	57
5.1.6	Validation de la méthode	57
5.1.7	Référentiel eulérien	58
5.2	Intervalles de temps	58
5.3	Problème	59
5.4	Famille de solutions	60
5.5	Solution analytique pour chaque tour	61
5.6	Condition au rayon de mesure	62
5.6.1	Restrictions du système de mesure	62
5.6.2	Hypothèse	62
5.7	Effet de bord et épaisseur de peau	63
5.8	Condition initiale	64
5.9	Commentaire	65
5.10	Validation de la solution	66
5.10.1	Champ de température direct et analytique	66
5.10.2	Reconstruction sans bruit	67
5.10.3	Robustesse au bruit de mesure	69
5.10.4	Calibrage	71
5.11	Comparaison avec une méthode numérique	72
5.12	Temps de calcul	73
5.13	Conclusion	74
CHAPITRE VI. ÉTUDE THERMIQUE EXPÉRIMENTALE		75
6.1	Introduction	75
6.2	Insertion des thermocouples	76
6.3	Système d'acquisition	78
6.4	Calibrage	79
6.4.1	Matériau équivalent	79
6.4.2	Procédure de calibrage	80
6.5	Commentaire sur le temps de réponse	81
6.6	Essais sur laminoir pilote	81
6.7	Comparaison entre le capteur slot et drill	82
6.8	Influence du taux de réduction	83
6.9	Influence de l'épaisseur de calamine	84
6.10	Modèle de coefficient de transfert thermique dans l'emprise	85
6.11	Conclusion	86

CHAPITRE VII. PROBLÈME COUPLÉ THERMOÉLASTIQUE	87
7.1 Introduction	87
7.1.1 Objectifs du chapitre	87
7.1.2 Fibres optiques et thermocouple	89
7.2 Validation de la méthode	89
7.3 Principe de superposition	90
7.4 Problème auxiliaire C	90
7.5 Champ de température évalué par méthode inverse	91
7.6 Problème auxiliaire A	92
7.6.1 Déplacements	92
7.6.2 Contraintes	93
7.7 Problème auxiliaire B	94
7.8 Validation de la solution	95
7.8.1 Champ de température en laminage à chaud	95
7.8.2 Comparaison avec un modèle aux éléments finis	96
7.8.3 Comparaison avec un modèle approché	97
7.9 Reconstruction des contraintes de contact	97
7.10 Temps de calcul	99
7.11 Conclusion	99
PART B MÉTHODES INVERSES EN TROIS DIMENSIONS	101
CHAPITRE VIII. THERMO-ELASTICITÉ TRIDIMENSIONNELLE	103
8.1 Théorie des potentiels réels	103
8.2 Equation de la chaleur	109
CHAPITRE IX. ÉVALUATION DES CONTRAINTES DE CONTACT EN 3D.	111
9.1 Introduction	111
9.2 Choix de la méthode analytique	112
9.3 Principes de la méthode inverse	113
9.3.1 Condition	113
9.3.2 Equilibre général	114
9.3.3 Contraintes de contact	114
9.4 Expression des mesures	114
9.5 Condition	115
9.6 Modèle bi-harmonique, termes courants	115
9.6.1 Potentiels en déplacements	115
9.6.2 Champ de contrainte	116
9.7 Modèle harmonique, termes d'amorce	116
9.8 Extraction des coefficients	119
9.8.1 Extraction des termes d'amorce	119
9.8.2 Extraction des termes courants	120
9.9 Equilibre général	121
9.9.1 Modèle harmonique	121
9.9.2 Expression des résultantes	121
9.9.3 Conditions faibles	122
9.10 Contraintes de contact	124
9.11 Nombre de troncature	124
9.12 Validation de la méthode	125
9.12.1 Procédure	125
9.12.2 Conditions de laminage à froid	125
9.12.3 Reconstruction et discussion	127
9.13 Intérêt de la solution 3D	131
9.14 Conclusion	133
CHAPITRE X. ÉVALUATION DE LA TEMPÉRATURE ET DES FLUX EN 3D	135
10.1 Introduction	135

10.2 Intervalles de temps	137
10.3 Problème	137
10.4 Famille de solutions	138
10.5 Solution analytique sur chaque tour	138
10.6 Solution stationnaire réactualisée à chaque tour	139
10.7 Solution transitoire	141
10.8 Commentaire	142
10.9 Validation de la solution	143
10.9.1 Champ de température analytique prescrit	143
10.9.2 Reconstruction sans bruit	144
10.9.3 Robustesse au bruit de mesure	146
10.10 Temps de calcul	147
10.11 Conclusion	147
CHAPITRE XI. CONCLUSION GÉNÉRALE	149
11.1 Conclusion	149
11.2 Perspectives	150
PART C ANNEXES	151
ANNEXE A. SOLUTION ANALYTIQUE DIRECTE	153
ANNEXE B. PROBLÈME COUPLÉ THERMOÉLASTIQUE	155
B.1 Preuve de la solution particulière de l'équation de Navier	155
B.2 Champ de température	157
ANNEXE C. SOLUTION ANALYTIQUE DIRECTE EN 3D.	159

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Ce travail de doctorat porte sur l'utilisation des mathématiques analytiques dans le cadre de méthodes inverses appliquées à l'industrie. Ces travaux tiennent au développement de capteurs inverses en temps réel adaptés au laminage industriel. Le premier producteur d'acier dans le monde ArcelorMittal dirige un projet européen, qui vise à montrer la faisabilité de capteurs mesurant les champs (température, contraintes) dans le contact entre le produit et l'outil sans altérer les conditions de ce contact. Ce projet nommé "Capteurs de contact avancés visant à l'amélioration du laminage à chaud et à froid"¹ est financé par le Fond de recherche pour le charbon et l'acier². Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein du laboratoire Navier³ et financé par l'école des Ponts ParisTech. Cependant un contrat sur trois ans signé avec ArcelorMittal a permis à l'auteur d'être partie prenante de ce projet européen, et ainsi de voir ses recherches concrétisées par une demande industrielle réelle.

1.1. Enjeux

L'enjeu de cette thèse est double, académique et industriel. Académique en ce sens que les travaux cherchent à recenser et utiliser efficacement les méthodes de résolution analytiques existantes, pour des problèmes inverses en thermoélasticité, dans le cadre d'une métrologie en temps réel. En effet, les solutions analytiques sont souvent exploitées comme des cas purement théoriques, trouvant à bien des égards un certain succès dans la culture de l'ingénieur (comme c'est le cas par exemple du calcul en élasticité linéaire des facteurs d'intensité de contraintes), mais qui par bien des aspects sont reléguées à des cas d'écoles anciens servant au mieux à valider des codes de calculs numériques sur des exemples particulièrement simples. Ces solutions et méthodes de résolution analytiques ne font d'ailleurs guère plus l'objet de recherches en mathématiques pures. Cependant les problématiques propres, liées au caractère inverse des problèmes à traiter, pénalisent les méthodes de résolution numériques, en ce sens que les problèmes inverses sont mal posés, et qu'une stabilisation des algorithmes numériques est nécessaire mais souvent délicate si l'on considère les conditions extrêmes (champs très singuliers) appliquées aux outils industriels de laminage. Par ailleurs la métrologie en temps réel exclut l'utilisation de codes numériques trop coûteux en temps de calcul (méthodes itératives etc...). Ces deux aspects contribuent à renouveler assez largement l'intérêt pour les solutions analytiques. Il convient alors d'en regrouper (dans la mesure du possible) les méthodes les plus efficaces (en termes de précision et de temps de calcul notamment) et les plus adaptées pour la métrologie. Nous verrons notamment différents développements en séries élémentaires permettant non seulement de donner à une suite de points mesurés une forme analytique, mais également de simplifier les équations aux dérivées partielles à résoudre.

D'autre part l'enjeu de cette thèse est également industriel, car ces travaux s'inscrivent dans une démarche de développement de capteurs adaptés à la mise en forme de l'acier par laminage. Ainsi l'étude de la robustesse au bruit de mesure, les contraintes technologiques liées à l'insertion des capteurs, les limitations en terme de fréquence d'acquisition et les problématiques de calibrage sont au coeur des développements qui suivent. Par ailleurs l'écriture de logiciels efficaces d'interprétation de mesures dans le cas d'analyses bidimensionnelles et tridimensionnelles ont fait l'objet d'un réel investissement, dans un souci de partenariat avec l'utilisateur industriel.

Ainsi, l'ensemble des travaux présentés, peut constituer une sorte de réhabilitation des méthodes analytiques, dont la supériorité sur les méthodes numériques (en termes de temps de calcul et parfois aussi de précision) est

1. Titre original : "Advanced Roll Gap Sensors for Enhanced Hot and Cold Rolling Processes"

2. Research Fund for Coal and Steel

3. Université Paris-Est, Laboratoire Navier UMR 8205, Ecole des Ponts ParisTech, CNRS, IFSTTAR

mise en lumière, dans le contexte précis de la métrologie en temps réel sur des géométries simples. Les méthodes mathématiques que nous exposons dans ce mémoire sont appliquées sur une géométrie cylindrique à travers un certain nombre d'exemples tous liés au procédé de laminage, que nous introduisons brièvement.

1.2. Le procédé de laminage

Le laminage est l'un des procédés de fabrication majeur de l'industrie de l'acier et de l'aluminium. Le principe fondamental du procédé est de déformer plastiquement le produit entre deux cylindres tournants, qui sont nommés cylindres de travail. Nous présentons uniquement le laminage des produits plats (tôle plus ou moins épaisse allant de la dizaine de centimètres à quelques centaines de micromètres d'épaisseur). Il existe beaucoup d'autres types de laminage (de poutres par exemple), mais ceux-ci ne sont pas considérés dans cette présentation générale. Dans le cas de l'industrie de l'acier, les cylindres de travail ont une largeur variant entre un et deux mètres et un diamètre variant entre 40 et 70 centimètres. Le cylindre de travail est massif, le plus souvent constitué de fonte en coeur et d'acier en superficie. Il s'agit d'un outil cher et dont la manipulation prend du temps en raison de sa masse importante. Chaque cylindre de travail a une forme assez complexe à ses extrémités (nommée tourillon et manchons), lui permettant d'être emmanché dans un axe de rotation motorisé. Une pression importante est exercée sur les cylindres de travail pour déformer plastiquement le produit. Cette pression est le plus souvent assurée par deux autres cylindres (de rayon plus élevé) nommés cylindres d'appui. Ce montage stabilise l'ensemble et limite la flexion des cylindres de travail ainsi que les vibrations (phénomène de broutage). Cependant certains petits laminoirs ne sont pas équipés de cylindres d'appui, la pression étant directement exercée au niveau de l'axe de rotation des cylindres de travail. C'est le cas notamment du laminoir de laboratoire dit "pilote" du centre de recherche d'ArcelorMittal à Maizières-les-Metz.

Le procédé peut être effectué à chaud (produit à 1300 K environ) pour les fortes épaisseurs (tôles appelées brame de 30 cm à des épaisseurs de l'ordre du centimètre) ou à froid (produit à 400 K) pour les épaisseurs plus faibles (tôles minces de quelques millimètres à quelques centaines de microns). Les températures indiquées dépendent assez largement de la nuance d'acier laminée, et modifient la structure cristalline du produit. Il existe un transfert thermique important entre le produit et le cylindre de travail, il est donc nécessaire de refroidir ce dernier en aspergeant de l'eau, une pièce supplémentaire assure que l'eau s'évacue sans s'écouler sur le produit. Par ailleurs une émulsion d'eau et d'huile est projetée à l'entrée de l'emprise pour lubrifier le contact. Une tension est également exercée sur la tôle grâce à un cylindre autour duquel s'enroule le produit laminé en fin de procédé. Ce cylindre est appelé la bobineuse. Un dernier cylindre appelé cylindre de planéité sert de support au produit avant de s'enrouler autour de la bobineuse. La Figure 1.1 résume le procédé de laminage. Les proportions ne sont pas respectées pour rendre le schéma plus lisible.

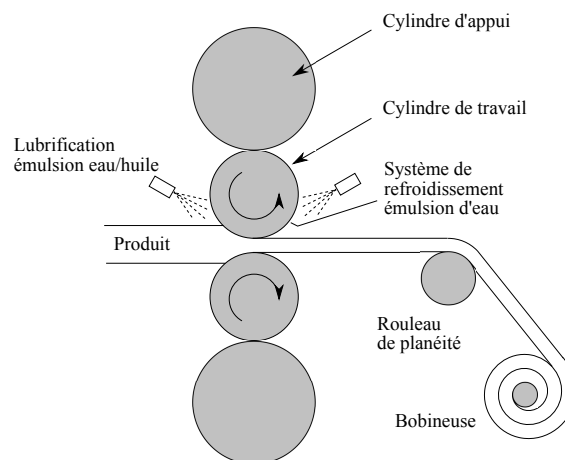


FIGURE 1.1 – Schéma simplifié du procédé de laminage

1.3. Modélisation prédictive

La qualité du produit se mesure en termes de planéité⁴, de qualité de surface (fissures etc...) et de constance de l'épaisseur de sortie. Les différents matériaux laminés (aciers peu ou fortement alliés, à faible ou fort taux de carbone, aciers inoxydables ou spéciaux) présentent des propensions différentes aux défauts. La vitesse de rotation des cylindres de travail, la force de laminage (pression exercée par les cylindres d'appuis), la vitesse d'entrée du produit ainsi que sa température initiale, le débit et l'orientation du système de refroidissement et la lubrification sont autant de paramètres qui déterminent la qualité du produit.

Le procédé de laminage est bien antérieur à toute compréhension rationnelle des phénomènes mis en jeu. L'empirisme est donc l'approche première (des années 30 aux années 70) qui permet d'établir des lois expérimentales d'application et de précision très restreintes (applicables à certaines conditions de laminage). Cependant l'industrie contemporaine combine des vitesses de rotation plus élevées, des taux de réduction d'épaisseur du produit plus importants et surtout des aciers plus durs. Nous sortons alors du champ d'application des lois empiriques, ce qui motive le développement de simulations numériques. En effet, des phénomènes complexes interviennent au niveau du contact entre le produit et le cylindre de travail. Sans une bonne compréhension de ces phénomènes, les dispositifs de contrôle, le système de refroidissement et de lubrification restent non-optimisés. Ainsi, il existe des recherches très abondantes dans le domaine de la simulation numérique du procédé de laminage. Celles-ci permettent de prédire l'évolution des paramètres importants pour la qualité du produit, pendant la déformation plastique de celui-ci. La conception des systèmes de refroidissement etc... est par ce biais améliorée. Ces simulations sont de plus en plus fines et couplent les comportements du produit et des cylindres. Le produit nécessite une modélisation thermo-visco-plastique. Les différents cylindres restent quant à eux en régime thermo-élastique. Beaucoup d'auteurs se concentrent sur la modélisation du procédé de laminage par éléments finis (le plus souvent). L'un des premiers outils permettant le couplage de la bande et du cylindre a été proposé par Hacquin (1996). Ce modèle a donné lieu à un logiciel appelé Lam3/Tec3 développé par le Cemef, Transvalor, ArcelorMittal Research et Alcan, et résout le problème thermo-elastique-viscoplastique de la bande par calcul aux éléments finis 3D (ou 2D) et résout le problème thermoélastique du cylindre par des calculs semi-analytiques. Jiang and Tieu (2001) ont proposé un modèle 3D aux éléments finis pour résoudre le problème en régime rigide-plastique. Plus récemment Montmitonnet (2006) a proposé un modèle couplé pour le laminage à chaud et à froid. Un modèle assez exhaustif adapté pour le laminage à chaud a été développé par Wang et al. (2009). En outre Abdelkhalek et al. (2011) a utilisé Lam3/Tec3 pour y ajouter un calcul en flambement pour les contraintes dans la bande au niveau de la sortie de l'emprise, de manière à prédire avec précision les défauts de planéité du produit.

1.3.1. Contact mécanique

La modélisation du contact entre le produit et le cylindre de travail est particulièrement délicate. En effet, il s'agit d'un problème de contact lubrifié, faisant intervenir une loi de frottement qu'il faut choisir, par exemple une loi de Coulomb de Tresca ou de Norton. Ce choix n'est pas sans incidence sur les résultats du modèle. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà dit plus haut, ce contact résulte d'un couplage entre le produit sous régime thermo-visco-plastique et le cylindre de travail sous régime thermo élastique, il faut donc tenir compte de leurs déformations respectives.

Il apparaît par ailleurs que la vitesse relative entre le produit et le cylindre de travail n'est pas uniforme. En effet considérons le cas du laminage à froid où le produit est donc relativement dur. En début d'emprise, la vitesse tangentielle du cylindre est plus élevée que celle du produit, le cylindre est donc moteur, cette vitesse relative évolue à mesure que l'on avance dans l'emprise puis s'annule en un point appelé point neutre. Au-delà du point neutre la vitesse relative change de signe et le produit devient donc moteur. Ce fait s'explique par l'incompressibilité de la déformation plastique, c'est-à-dire la conservation du débit volumique (si l'on néglige la variation de volume élastique). Cela se traduit par une discontinuité des cisaillements dans l'emprise. Nous pouvons noter le fait remarquable que ce changement de signe des cisaillements explique le fait qu'il faille imposer une pression de laminage sur le cylindre de travail plus élevée que la contrainte d'écoulement du produit. En effet, si l'on considère le cylindre soumis à des cisaillements positifs jusqu'au point neutre puis négatifs au-delà, cela crée une résultante quasi-verticale qu'il faut naturellement compenser par une surpression au niveau du cylindre d'appui.

4. Un défaut de planéité est une inhomogénéité dans le champ d'auto-contrainte d'une section du produit (pouvant conduire à du flambement)

En d'autres termes, les cisaillements dans le contact entre le produit et le cylindre de travail résistent à la plastification du produit. Cependant le frottement est nécessaire au procédé dans la mesure où la bande est entraînée par frottement, il est donc impossible de laminier sans frottement, ainsi la position du point neutre et la quantification des cisaillements est primordiale pour bien optimiser la force de laminage et le niveau de lubrification.

Pour le cas du laminage à chaud, les simulations numériques démontrent un autre mode de fonctionnement. Le produit étant beaucoup plus mou, il existe non pas un point neutre où l'on observe le changement brutal de signe de la vitesse relative entre le cylindre de travail et le produit, mais une zone neutre ou zone collante (qui peut éventuellement être discontinue), où la vitesse tangentielle du cylindre est la même que celle du produit. Les paramètres de laminages tels que la force de laminage, la lubrification (qui joue directement sur la loi de frottement) modifie très significativement la position du point neutre ou de la zone neutre. Par ailleurs, des irrégularités ou des défauts du produit se traduisent par une modification locale du profil de contrainte et de cisaillement surfacique dans l'emprise, mais restent très difficiles à appréhender numériquement. Les profils de pression et de cisaillement dans l'emprise ont une importance capitale du point de vue industriel.

1.3.2. Transfert thermique

Le transfert thermique est également difficile à modéliser correctement. Le contact entre le produit et le cylindre de travail fait l'objet d'une conduction de la chaleur, le frottement important et la déformation plastique du produit sont également des sources de chaleur à prendre en compte. Dans le cas du laminage à chaud la très haute température du produit implique aussi un transfert thermique par radiation. La lubrification et le système de refroidissement agissent comme une convection forcée pour le cylindre, tandis que l'air ambiant agit comme une convection libre. Ainsi de très nombreux types de transferts thermiques sont à envisager. A cela nous devons ajouter le fait que les coefficients de transfert thermique, qui permettent de caractériser le contact thermique entre le produit et le cylindre, sont à déterminer expérimentalement. Ces coefficients sont variables selon le type de contact (nuance d'acier, rugosité etc...) et varient le long du contact entre le cylindre et le produit en raison de la variation du profil de pression dans l'emprise⁵, comme nous le démontrerons au chapitre 6. Il existe ainsi dans les modèles prédictifs numériques une part d'arbitraire sur le choix de ces coefficients de transfert thermique de la même manière que la loi de frottement pour le contact mécanique.

Les modèles numériques approchant ces problématiques montrent que l'emprise fait l'objet de gradients thermiques très forts. De plus un régime pseudo-périodique semble s'installer, c'est-à-dire que la carte des températures (considérée dans un référentiel fixe) varie peu au cours du temps, cela revient à dire que l'on peut décrire la thermique du procédé à l'aide d'un régime permanent et d'un terme de dérive, ce qui sera utilisé dans les chapitres 5 et 10.

Les problèmes de transferts thermiques pendant le procédé de laminage sont fondamentaux du point de vue industriel. En effet, les gradients très élevés et cycliques (dus à la rotation des cylindres) sont responsables d'une usure en fatigue thermique, qui est observée sous forme de "griffes de chaleur" à la surface des cylindres. La qualité de surface du produit est très liée à l'apparition de tels défauts, et ainsi la durée de vie des cylindres est conditionnée par ces phénomènes de fatigue. Par ailleurs, le profil de température étant non-homogène dans l'axe du cylindre, les dilatations thermiques hétérogènes entraînent des problèmes de planéité du produit.

1.4. Capteurs et méthodes inverses

Les études théoriques prédictives, que nous avons évoquées, permettent en premier lieu de comprendre comment le métal s'écoule dans l'entrefer⁶ et de prédire l'évolution des champs de vitesse de déformation, de contrainte, de température etc... dans une optique d'amélioration des systèmes et outils pour le laminage de sorte à élaborer un meilleur produit à moindres coûts.

Cependant ces modèles numériques n'ont pas (ou peu) de contrepartie expérimentale, permettant de vérifier leur cohérence en conditions connues (lors d'une comparaison entre un modèle théorique et sa transcription expérimentale). Certains phénomènes dans l'emprise ne sont ainsi connus que théoriquement, sans qu'il soit parfaitement déterminé s'il s'agit d'un effet réel du procédé ou d'un effet de modélisation. Par ailleurs, le contrôle du procédé en temps réel par des boucles d'asservissement (automatisation du réglage des paramètres principaux)

5. Le terme d'emprise désigne la zone de contact entre le cylindre de travail et le produit

6. Ce terme désigne la zone entre les deux cylindres de travail

serait, à terme, une avancée considérable pour le procédé et donc pour l'industrie de l'acier. Cela nécessite de mesurer les champs les plus utiles (contraintes, température, épaisseur du film d'huile) pendant le procédé.

Cette problématique double (validation expérimentale et automatisation) conduit à considérer le développement d'une métrologie adaptée au problème de contact entre le produit et l'outil. En effet, mesurer directement les champs dans le contact, par exemple par un capteur de type aiguille pour le frottement, modifie significativement les conditions du phénomène à quantifier. L'écoulement du métal est perturbé, ainsi que la forme du contact (contact avec aiguille au lieu d'un cylindre lisse) et la lubrification. L'idée est donc davantage de déduire les champs à évaluer dans le contact (tôle/cylindre dans le cas précis du laminage) à partir de la mesure des champs résultants de ce contact dans une partie plus accessible du dispositif.

Cette inversion formelle entre les causes (conditions thermiques et mécaniques dans le contact) et les conséquences mesurables (champs de température et de déformations résultant dans l'outil par exemple) est le point central d'une grande typologie de problèmes qualifiés d'inverses (définie par Bui (2006) parmi beaucoup d'autres auteurs)⁷. Par problème inverse, il faut entendre problème indirect, c'est-à-dire que l'on cherche à déterminer un champ ou une grandeur sans la mesurer directement. Une confusion subsiste parfois du fait de la terminologie, en effet comme un grand nombre de solutions numériques s'expriment comme une matrice représentant la relation linéaire entre la grandeur à déterminer et la grandeur mesurée, résoudre le problème inverse revient à inverser cette matrice. Il faut cependant bien garder à l'esprit que tous les problèmes inverses ne conduisent pas nécessairement à l'inversion de matrices. C'est le cas des méthodes analytiques que nous développons dans ces recherches (mais également des méthodes numériques itératives, qui identifient la grandeur par essais successifs en minimisant l'écart entre la grandeur mesurée et sa contrepartie calculée par le modèle).

Il existe deux types de méthodes inverses, qui sont alors dites de première ou de seconde espèce. Les problèmes inverses de seconde espèce tiennent à la détermination des paramètres régissant les lois d'un modèle grâce à l'observation (mesurable) des causes d'une part et des conséquences d'autre part. L'identification des paramètres des lois de comportement de déformation des matériaux s'obtient par méthode inverse de seconde espèce en mesurant les déformations (conséquences) résultant d'un chargement connu (causes). Le cas que nous avons décrit précédemment n'appartient manifestement pas à cette typologie de problèmes, il s'agit de méthodes inverses de première espèce, qui étant donné un modèle dont les paramètres sont connus (module d'Young, diffusivité thermique etc...) et partant d'une grandeur mesurée (conséquence) conduit à l'évaluation d'une autre grandeur (cause, dans une autre région du système par exemple).

Les cas d'application de la recherche de solutions analytiques, que nous nous sommes donnés dans ces travaux de thèse, sont des exemples caractéristiques d'une tendance assez générale à orienter la métrologie vers des problèmes inverses de première espèce. En effet, le contrôle non destructif de systèmes en service, la localisation de défauts par sollicitation mécanique de structure dans le génie civil (par exemple les câbles où les tabliers de ponts) ou la métrologie dans des milieux inaccessibles (comme le cas d'un contact mécanique par exemple, on pensera à l'emboutissage autant qu'au laminage) sont autant de problèmes inverses qui connaissent un essor particulier ces dernières années.

Cependant ces problèmes inverses ont le plus souvent été abordés par des méthodes numériques, soit du fait des complexités géométrique et physique (il n'y a alors que peu de chances de trouver une alternative analytique), soit par simple habitude comme cela peut être le cas pour les méthodes inverses appliquées aux cylindres de laminage, qui sont pour la plupart numériques (comme nous le verrons au cours des chapitres 4 à 10), alors même que le cylindre est une forme géométrique d'une remarquable simplicité et que son comportement est thermoélastique isotrope. Ainsi, les méthodes classiques de résolution analytique des problèmes de thermoélasticité (et plus généralement d'un grand nombre de problèmes en physique mathématique) doivent être réinvesties pour être adaptées et testées dans la formulation des problèmes inverses. Comme nous l'avons déjà précisé, ces outils mathématiques doivent permettre de prendre en compte des mesures discontinues de grandeurs, et ainsi ne seront mentionnées ici (en particulier au chapitre 2), que les plus pertinentes de ce point de vue (notamment les développements en séries élémentaires).

7. On pourra se rappeler, comme l'un des premiers exemples de méthode inverse, de la découverte en 1846 par le physicien français Urbain Le Verrier de la planète Neptune, cause alors inconnue des perturbations mesurables de la trajectoire d'Uranus (conséquences), via la loi de Kepler.

1.5. Méthodes inverses appliquées à la métrologie en laminage

Nous présentons les principes généraux sous-jacents aux méthodes inverses développées pour le laminage industriel, qui constituent autant d'exemples d'application des méthodes analytiques recensées aux chapitres 3 et 8. Comme nous l'avons précisé dans l'introduction du procédé de laminage, il est crucial de caractériser le contact tôle/cylindre d'un point de vue mécanique et thermique. Nous avons également précisé l'importance des méthodes inverses dans ce contexte. L'idée principale est de ne pas chercher à caractériser l'interaction (ou le couplage) entre le produit et l'outil grâce à une modélisation extérieure qui nécessite de résoudre le problème tant pour la bande d'acier laminée que pour le cylindre de travail. Ce type de modèles est dédié aux travaux numériques prédictifs, que nous avons présentés, pour mieux comprendre les phénomènes mis en jeu. Si le problème de laminage est d'une grande complexité lorsqu'il est considéré dans son ensemble, il devient d'une grande simplicité lorsqu'il est réduit au cylindre de travail seul, où les équations aux dérivées partielles régissant les champs de contrainte et de température sont linéaires. Du fait de la loi de l'action et de la réaction, si les chargements mécaniques et thermiques s'appliquant au cylindre de travail sont connus, alors les chargements imposés par le cylindre au produit le sont également. Comme nous en avons montré la nécessité, une approche inverse est utilisée pour évaluer ces chargements appliqués au cylindre de travail. L'idée est d'utiliser le cylindre de travail lui-même comme un capteur, en mesurant le tenseur des contraintes et la température à l'intérieur de la masse du cylindre. Ainsi, schématiquement les conditions de chargement appliquées au cylindre sont responsables de champs de contrainte et de température à l'intérieur de celui-ci, qui une fois mesurés permettent par méthode inverse d'en évaluer les causes, à savoir les chargement en surface.

Plus précisément, l'idée principale de l'analyse inverse des contraintes de contact est d'utiliser la déformation élastique du cylindre de travail pour déduire le vecteur contrainte à la surface du cylindre responsable de ce champ de déformation. Cette idée tient aux développements récents de capteurs de déformation par fibres optiques (cf Ferdinand et al. (2009)) dans la masse du cylindre. Ainsi il est possible de mesurer le tenseur de déformation et donc de contrainte à l'intérieur du cylindre, comme cela est étudié dans le projet européen RFS-PR-08051. La vitesse d'évolution des champs dans le cylindre est plus faible que la vitesse de rotation, ainsi au cours d'un tour, les champs varient peu dans un référentiel fixe. Avec un seul capteur "noyé" dans la masse du cylindre, il est donc possible de considérer tout un cercle de mesures, comme le montre la figure 1.2.

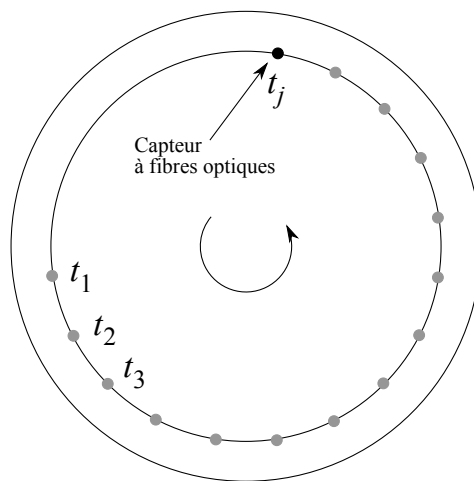


FIGURE 1.2 – Mesures noyées dans le cylindre

Le principe de la résolution est de supposer un vecteur contrainte de surface inconnu sous une forme de série élémentaire (à choisir correctement compte tenu du problème). Les données mesurées sont développées en une série du même type. L'identification des paramètres inconnus du développement en série du vecteur contrainte de surface, s'obtient en imposant que les données mesurées soient égales aux contraintes correspondantes calculées au rayon de mesure. De manière complètement équivalente, on peut également se représenter la méthode inverse, comme la résolution analytique d'un problème de mécanique ordinaire sur le sous-domaine dont la frontière est

le cercle défini par les mesures de contraintes à l'intérieur du cylindre, la partie inverse de la résolution consistant simplement à étendre cette solution analytique par continuité vers la surface du cylindre.

La solution inverse, visant à l'évaluation du champ de température dans le cylindre de travail et les flux de chaleur entrants, repose sur les mêmes principes que la méthode précédente. Si les sources et les types de transport de chaleur (conduction, radiation, convection forcée, convection libre) sont multiples lorsque l'on considère le problème dans son ensemble, à l'intérieur du cylindre seule l'équation de la chaleur est à résoudre avec comme conditions à satisfaire : la condition initiale et l'identification de la solution (évaluée au rayon de mesure) aux températures mesurées à l'intérieur du cylindre. L'insertion d'un thermocouple sous la surface du cylindre est possible et a été réalisée par plusieurs expérimentateurs cités au chapitre 6. Un procédé d'insertion de thermocouple sous la surface est également développé dans le cadre du projet européen RFS-PR-08051, et discuté dans ce même chapitre, où deux alternatives technologiques sont testées et comparées du point de vue de la méthode inverse.

1.6. Problèmes mal posés

Nous avons déjà évoqué le fait classique que les méthodes inverses sont mal posées. Ceci est à comprendre au sens du mathématicien français Hadamard, qui énonce qu'un problème bien posé admet une solution unique et stable. Le principe de stabilité de la solution est que de petites variations des entrées conduisent à de petites variations des sorties du problème. Réciproquement, un problème est mal posé, s'il n'existe pas de solution, ou si elle n'est pas unique ou encore si elle n'est pas stable. En thermoélasticité linéaire, il existe toujours une solution unique, nous nous concentrons donc sur le manque de stabilité des solutions inverses. Ainsi, de manière très classique, une solution inverse aura tendance à produire de très larges variations du résultat pour de très petites variations des entrées, ce qui peut rendre le résultat inexploitable.

D'un point de vue général, cela se comprend comme le fait qu'un très grand nombre de chargements très différents, se traduit par des effets mesurables quasi-similaires, ainsi en partant de ces effets, il est difficile de distinguer lequel des chargements possibles en est responsable.

D'un point de vue numérique, cet état de fait peut se comprendre grâce à la notion de conditionnement de matrice. En effet, bien souvent, on cherche à établir la relation linéaire matricielle entre les entrées et les sorties, le problème inverse revient donc à inverser cette matrice. Alors, une petite variation dans le vecteur d'entrée est multipliée par un facteur d'amplification de l'ordre de grandeur du conditionnement de la matrice, qui peut devenir extrêmement élevé en cas de mauvais conditionnement de celle-ci.

Les méthodes numériques itératives quant à elles cherchent à inventer une condition possible pour les sorties en minimisant l'écart (au sens des moindres carrés par exemple) entre les entrées mesurées et les champs calculés correspondant à ces entrées. Le caractère mal posé d'un problème s'exprime dans le fait que selon le choix initial de la condition possible pour les sorties et le nombre d'itérations, l'algorithme converge vers des solutions radicalement différentes.

Finalement dans le cas des méthodes inverses analytiques développées dans ces travaux, le fait que le problème soit mal posé s'exprime en termes de fréquences au sens large. En effet, comme nous l'avons développé plus haut, des développements en séries sont effectués. Nous entendons par fréquences l'indice des termes sommés. Les équations différentielles de diffusion, valables en thermoélasticité, agissent comme des filtres passe-bas, c'est-à-dire que l'amplitude des hautes fréquences est atténuée (d'autant plus que l'on se situe loin de la surface). Ainsi, à partir d'une donnée dont les hautes fréquences sont faibles, on cherche à reconstruire un signal dont les hautes fréquences sont plus élevées. L'inversion du problème agit donc comme un amplificateur de hautes fréquences, si bien qu'une petite variation des fréquences mesurées en entrée est amplifiée également. Ces considérations font l'objet de plusieurs commentaires pratiques dans la suite du texte (notamment en termes de troncature des sommes etc...).

Les méthodes inverses numériques sont toujours stabilisées grâce à des algorithmes supplémentaires tels que la régularisation des matrices mal conditionnées ou la résolution du problème adjoint pour les méthodes itératives. Il apparaît à la lumière des présents travaux que les solutions analytiques ont une très bonne robustesse au caractère mal posé des méthodes inverses et ne nécessitent aucune stabilisation particulière, l'enjeu réside uniquement dans la troncature des sommes, ce qui est en tous les cas nécessaire, car numériquement seules des sommes finies peuvent être considérées. Par ailleurs on remarque que plus la donnée d'entrée est connue avec précision (c'est-à-dire à des fréquences d'acquisition les plus élevées possible, avec un bruit de mesure minimal) meilleure sera la stabilité de la méthode inverse et son résultat, ce qui n'est pas le cas pour un bon nombre d'algorithmes numériques

(comme les algorithmes de retour vers la surface par exemple, cf Raynaud and Bransier (1986)).

1.7. Plan

Dans le chapitre 2 nous introduisons les concepts et outils mathématiques utiles à la lecture des chapitres suivants. Il ne s'agit en aucun cas de limiter la recherche des solutions analytiques à ces quelques théorèmes et définitions. Cependant, bien que l'une des principales difficultés est de savoir quels outils existent (c'est surtout un problème de culture qu'il faut sans cesse enrichir), il serait sans intérêt de mentionner trop de résultats sans but précis dans ce chapitre préliminaire. En règle générale, ne sont conservés que les résultats effectivement utilisés. Dans le chapitre 3 nous introduisons les concepts d'élasticité plane dans le corps des nombres complexes, ainsi que l'équation de la chaleur dans un mobile tournant (équation établie à partir d'un bilan énergétique). Ces résultats sont centraux pour la compréhension des analyses qui suivent, ainsi ils sont exposés en détail quoiqu'ils soient similaires aux ouvrages classiques sur le sujet. Dans le chapitre 4 le problème inverse appliqué à l'évaluation en temps réel des contraintes de contact pour le laminage est résolu en deux dimensions sous conditions isothermes. Ce travail est contextualisé dans la littérature existante pour en montrer le caractère innovant et robuste, là où d'autres méthodes récentes sont insatisfaisantes. Les aspects purement techniques comme le choix du nombre de troncature des sommes etc... sont étudiés en détail. Dans le chapitre 5 le problème inverse visant à l'évaluation en temps réel du champ de température et des flux de chaleur est résolu en deux dimensions. De même que pour le problème précédent, une revue bibliographique de l'état de l'art permet de situer cette solution par rapport à un certain nombre d'algorithmes numériques. Dans le chapitre 6 des études inverses thermiques expérimentales sont proposées. Les essais ont été réalisés sur le laminoir pilot d'ArcelorMittal de Maizières-le-Metz, et utilise des thermocouples conçus dans le cadre du projet européen RFS-PR-08051. Les principes de conception sont explicités et deux typologies de capteurs sont comparées. Par ailleurs, l'analyse des champs de température grâce à la méthode inverse thermique permet d'évaluer l'influence de différents taux de réduction d'épaisseur de bande ainsi que l'influence de l'épaisseur d'oxyde (calamine). Par ailleurs ces analyses expérimentales démontrent que l'hypothèse assez fréquente dans l'industrie, selon laquelle le coefficient de transfert thermique entre le produit et le cylindre de travail est constant dans l'emprise, est fausse. Cela a des conséquences non négligeables sur la prédiction, par les modèles numériques dédiés, de la durée de vie des cylindres de travail. Dans le chapitre 7, le couplage thermoélastique est réalisé entre la méthode inverse élastique visant à l'obtention des contraintes de contact et la méthode inverse thermique. Ce couplage permet notamment de s'affranchir de l'hypothèse isotherme du chapitre 4 qui est fortement fausse en laminage à chaud. Par ailleurs ce chapitre donne l'occasion d'évaluer les contraintes thermiques responsables de la fatigue thermique du cylindre de travail, ce qui en détermine la durée de vie.

Dans la partie suivante, nous abordons les mêmes problématiques en thermoélasticité tridimensionnelle. Cela est un développement plus théorique que le cas en deux dimensions, dans la mesure où cela nécessite que plusieurs capteurs soient insérés sous la surface du cylindre et alignés selon le grand axe. Cependant les développements technologiques liés à l'insertion des capteurs et au câblage ne considèrent à l'heure actuelle qu'un seul capteur (un pour les déformations et un thermocouple). Il s'agit donc d'une extrapolation sur l'avenir. Dans le chapitre 8 nous exposons les principaux résultats d'élasticité 3D analytiques, qui permettent de comprendre facilement les développements qui suivent. Dans le chapitre 9 le problème inverse 3D visant à l'évaluation des contraintes de contact est résolu. Comme ce problème n'a jamais été traité (à la connaissance de l'auteur) la revue de la littérature est très réduite. Par ailleurs le chapitre 10 présente la méthode inverse thermique 3D. Ces deux derniers chapitres précisent les conditions technologiques nécessaires au succès des méthodes inverses 3D, en particulier le nombre de capteurs à insérer sous la surface du cylindre. L'intérêt de ces méthodes est également discuté en les comparant aux méthodes bidimensionnelles des chapitres 4 et 5.

CHAPITRE II

PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES

2.1. Avertissement

Ce chapitre recense un certain nombre de résultats, souvent utilisés dans la recherche de solutions analytiques en physique mathématique et en particulier en thermoélasticité. Nous n'exposons pas nécessairement les résultats avec toute la rigueur mathématique dont il faudrait faire preuve. Ce choix est délibéré pour permettre une lecture plus conforme aux habitudes de mécanique du solide, afin que le lecteur saisisse facilement le lien entre ces préliminaires mathématiques et les applications aux méthodes inverses en thermoélasticité qui suivent. Nous ne prétendons évidemment pas à l'exhaustivité, seuls les résultats nécessaires à la compréhension des chapitres suivants sont exposés ici. Seuls quelques commentaires complémentaires seront faits sur les solutions s'exprimant sous forme d'intégrales de frontière, quoiqu'elles n'aient pas, à proprement parler, été utilisées dans la résolution pratique des problèmes inverses. Ces quelques commentaires mettront en lumière les raisons fondamentales de l'échec de telles solutions dans le contexte précis des travaux menés.

Par ailleurs, aucun résultat nouveau n'est proposé, ainsi un lecteur habitué aux mathématiques analytiques de base pourra aisément se passer de lire ces préliminaires. L'enjeu est surtout de clarifier les outils utiles à la résolution des problèmes traités dans ces travaux de thèses. On pourra consulter avec profit l'ouvrage sur les fonctions spéciales de Andrews et al. (1999) et l'ouvrage sur la théorie de Fourier de Stein and Weiss (1971).

2.2. Mesures et développement en séries

2.2.1. Mesures

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats sur les développements en série, en gardant à l'esprit qu'un ensemble de points de mesure ne définit pas directement une fonction analytique. Une forme analytique est donc recherchée grâce à des séries. Les paragraphes suivants offrent plusieurs alternatives, à choisir selon le contexte. Nous considérons dans toute la thèse qu'une suite de points $y_j \in \mathbb{R}$ mesurés à la coordonnée $x_j \in E$ (où $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et E est un sous-espace de \mathbb{R}^n) est telle qu'il existe une fonction f de E dans \mathbb{R} de carré intégrable (soit $\int_E |f(x)|^2 dx < +\infty$) telle que $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, f(x_j) = y_j$. Nous pouvons dès lors travailler dans une structure d'espace de Hilbert. Les théorèmes suivants de décomposition d'une fonction de carré intégrable, peuvent ainsi se comprendre comme l'écriture d'un vecteur dans une base de l'espace.

Il est par ailleurs possible d'opérer une interpolation (linéaire ou grâce à des spline cubiques par exemple) pour augmenter artificiellement le nombre de points de mesure N . Cette technique permet d'obtenir des signaux de meilleure qualité, surtout dans l'optique d'une intégration numérique.

2.2.2. Analyse de Fourier

Théorème 1 Soit f une fonction de $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} périodique de périodes T_j (où $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$) et continûment dérivable, alors :

$$f(x) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{k_1, \dots, k_n} \exp\left(i \frac{2\pi k_1}{T_1} x^{(1)}\right) \dots \exp\left(i \frac{2\pi k_n}{T_n} x^{(n)}\right) \quad (2.1)$$

où l'on a :

$$\tilde{f}_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{T_1} \dots \frac{1}{T_n} \int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_n} f(\mathbf{x}) \exp\left(-i \frac{2\pi k_1}{T_1} x^{(1)}\right) \dots \exp\left(-i \frac{2\pi k_n}{T_n} x^{(n)}\right) dx^{(1)} \dots dx^{(n)} \quad (2.2)$$

De plus si f est discontinue (et admettant une dérivée à gauche et à droite) en un point ζ , selon une composante $x^{(k)}$ de \mathbf{x} , alors la somme de Fourier converge vers le milieu de la discontinuité :

$$\frac{f(x^{(1)}, \dots, \zeta^-, \dots, x^{(n)}) + f(x^{(1)}, \dots, \zeta^+, \dots, x^{(n)})}{2} \quad (2.3)$$

Si f est seulement périodique de carré intégrable, la convergence de la série de Fourier vers $f(\mathbf{x})$ est vraie en norme \mathcal{L}^2 , c'est-à-dire au sens du produit scalaire Hermitien :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T_1} \dots \frac{1}{T_n} \int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_n} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (2.4)$$

Cela revient à dire que la famille de fonctions $e_{j,k} : \mathbf{x} \rightarrow \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T_j} x^{(j)}\right)$ ($j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $k \in \mathbb{Z}$) forme une base de l'espace de Hilbert des fonctions périodiques de périodes T_j et de carré intégrable.

En particulier nous utiliserons fréquemment le cas d'une fonction $f(\theta, z)$ définie en coordonnées cylindriques et périodique de période 2π selon θ et $2L$ selon z et de carré intégrable admettant le développement en série de Fourier suivant :

$$f(\theta, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{k,l} \exp(ik\theta) \exp\left(i \frac{l\pi}{L} z\right) \quad (2.5)$$

où nous avons :

$$\tilde{f}_{k,l} = \frac{1}{4\pi L} \int_0^{2\pi} \int_{-L}^L f(\theta, z) \exp(-ik\theta) \exp\left(-i \frac{l\pi}{L} z\right) d\theta dz \quad (2.6)$$

Lorsque l'on interprète des mesures $y_j = f(\mathbf{x}_j)$ ($j \in \llbracket 1, N \rrbracket$), les coefficients $\tilde{f}_{k_1, \dots, k_n}$ ne sont pas donnés de manière analytiques, mais comme une suite de nombres complexes, calculés en fonction des signaux mesurés. Il est donc nécessaire de tronquer les sommes, ainsi la convergence des sommes (2.1) assure que si $\{K_1; \dots; K_n\}$ sont n entiers suffisamment grands :

$$f(\mathbf{x}) \simeq \sum_{k_1=-K_1}^{K_1} \dots \sum_{k_n=-K_n}^{K_n} \tilde{f}_{k_1, \dots, k_n} \exp\left(i \frac{2\pi k_1}{T_1} x^{(1)}\right) \dots \exp\left(i \frac{2\pi k_n}{T_n} x^{(n)}\right) \quad (2.7)$$

Ce type de développement est souvent très efficace, car les équations aux dérivées partielles se trouvent alors simplifiées du fait des exponentielles et sont le plus souvent à variables séparables. De plus, les intégrales à calculer (coefficients de Fourier) (2.2) se prêtent parfaitement à l'objectif de calcul en temps réel, car l'algorithme de la fast fourier transform (fft) peut être utilisé pour en calculer une bonne approximation. En effet, si la fonction f représente une donnée mesurée, elle n'est alors connue qu'aux points \mathbf{x}_j ($j \in \llbracket 1, N \rrbracket$), les intégrales (2.2) doivent donc être calculées numériquement. Les méthodes classiques de quadrature ne sont pas judicieuses dans ce contexte. Dans le cas unidimensionnel ($n = 1$) par exemple, il faut calculer K_1 intégrales en $\mathcal{O}(N)$, alors que le calcul d'une fft donne toutes les intégrales nécessaires en $\mathcal{O}(N \log(N))$. Dès que K_1 est supérieur à $\log(N)$ il est préférable d'utiliser des fft (en pratique c'est toujours le cas).

Dans le cas unidimensionnel où $n = 1$, en interpolant le signal mesuré de manière équirépartie sur $[0, T_1]$ (soit $x_j = (j-1)T_1/N$) nous avons l'écriture de la fft comme l'approximation d'une intégrale de Riemann :

$$\frac{1}{N} \text{fft}[f(x_j)]_{k_1} = \sum_{j=1}^N f(x_j) \exp\left(-i \frac{2\pi(j-1)k_1}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(x) \exp\left(-i \frac{2\pi k_1}{T_1} x\right) dx \quad (2.8)$$

Dans le cas à n dimensions, il suffit de considérer n calculs de fft successifs pour obtenir l'approximation de Riemann des intégrales (2.2).

Bien que les séries de Fourier et l'analyse en fréquence soient très utilisées pour les signaux temporels sonores, il est préférable d'éviter de résoudre un problème de diffusion thermique en développant en série de Fourier selon la variable temporelle t , à moins que l'on ne traite un problème à dynamiques rapides. Cela est dû au fait qu'il existe une relaxation thermique, que l'on peut souvent faire apparaître avec des exponentielles décroissantes, il est dans ce cas inadapté d'utiliser des sommes de fonctions oscillantes comme les séries de Fourier.

2.2.3. Séries hypergéométriques

Nous définissons ici les séries hypergéométriques, car elles interviennent comme des outils fondamentaux des fonctions spéciales utiles à la résolution analytique de certaines équations aux dérivées partielles. Une série hypergéométrique est une série de terme général c_k telle que c_{k+1}/c_k est une fraction rationnelle en k du type :

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\dots(k+a_p)x}{(k+b_1)(k+b_2)\dots(k+b_q)(k+1)} \quad (2.9)$$

Définition 1 Nous définissons la série hypergéométrique ${}_pF_q$ qui converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $p \leq q$, et pour $|x| < 1$ pour $p = q + 1$, et qui diverge pour tout $x \neq 0$ pour $p > q + 1$:

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} ; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{c_0} \quad (2.10)$$

où nous avons :

$$(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) \text{ pour } k > 0, (a)_0 = 1 \quad (2.11)$$

Les séries hypergéométriques sont utiles dans la résolution de certaines équation différentielles, puisqu'elles sont des solutions formelles de :

$$\left[x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} + b_1 - 1 \right) \dots \left(x \frac{d}{dx} + b_q - 1 \right) - x \left(x \frac{d}{dx} + a_1 \right) \dots \left(x \frac{d}{dx} + a_p \right) \right] y(x) = 0 \quad (2.12)$$

2.2.4. Fonction Gamma

La fonction Gamma est une extension pour des valeurs non entières de la notion de factorielle. Nous avons la définition suivante :

Définition 2 Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ n'étant pas un entier relatif négatif ou nul ($z \neq 0, -1, -2, \dots$) on appelle fonction Gamma de z et on note $\Gamma(z)$ la fonction suivante :

$$\Gamma(z) = \lim_{k \in \mathbb{N} \rightarrow \infty} \frac{k! k^{z-1}}{(z)_k} \text{ et } \Gamma(1) = 1 \quad (2.13)$$

Une conséquence immédiate de la définition est :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.14)$$

Nous pouvons donc écrire pour un entier positif (simple récurrence) n :

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (2.15)$$

C'est du fait des deux dernières propriétés de la fonction Γ que celle-ci est considérée comme l'extension au cas non entier du concept de factorielle. De très nombreuses relations existent autour de la fonction Γ . Nous ne reportons pas ici ces propriétés car cela serait fastidieux et peu utile. Néanmoins le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage de Andrews et al. (1999).

2.2.5. Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel sont très classiques en analyse, et interviennent très fréquemment dans la résolution d'équations aux dérivées partielles, notamment en thermique et en élasticité.

Définition 3 Nous appelons $J_\alpha(x)$ la fonction de Bessel de première espèce :

$$J_\alpha(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_0F_1 \left(\begin{matrix} - \\ \alpha+1 \end{matrix} ; -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\alpha}}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \quad (2.16)$$

Si $\text{Re}(\alpha) < 0$, alors il vient que le premier terme du développement diverge lorsque $x \rightarrow 0$. Par ailleurs la fonction Γ n'est pas définie pour des entiers négatifs ou nuls, ainsi la définition précédente n'est pas directement utilisable dans le cas où $\alpha = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce dernier cas nous adoptons la définition :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (2.17)$$

La fonction de Bessel de première espèce est solution de :

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} + \left(1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2\right)y(x) = 0 \quad (2.18)$$

Ce dernier résultat s'obtient à partir de l'équation de Whittaker, dérivée de l'équation (2.12). Il est remarquable que l'équation différentielle de Bessel (2.18) est inchangée pour $-\alpha$, ainsi $J_{-\alpha}$ est aussi solution. Si α n'est pas entier, $J_\alpha(x)$ et $J_{-\alpha}(x)$ ne sont pas proportionnelles, en revanche si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ alors la définition devient $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

Les dérivées des fonctions de Bessel de première espèce s'obtiennent par la formule de récurrence :

$$2J'_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) \quad (2.19)$$

Il existe un très grand nombre de relations sur les fonctions de Bessel, de formulations intégrales, de développements asymptotiques et de propriétés. On pourra consulter l'ouvrage de Watson (1944) où le handbook de Abramowitz and Stegun (1964), ou encore celui de Gradshteyn and Ryzhik (1992). Ne seront citées ici que les relations d'orthogonalité (au sens du produit interne) et les intégrales utiles dans la résolution des problèmes inverses traités dans ces travaux de thèse. La fonction de Bessel $J_\alpha(x)$ admet une infinité dénombrable de racines notées par ordre croissant $\lambda_p^{(\alpha)}$. Nous avons la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^1 x J_\alpha(x \lambda_p^{(\alpha)}) J_\alpha(x \lambda_q^{(\alpha)}) dx = \frac{\delta_{p,q}}{2} \left[J_{\alpha+1}(\lambda_p^{(\alpha)}) \right]^2 \quad (2.20)$$

Par ailleurs nous reportons ici quelques intégrales utiles à la résolution des problèmes pratiques de ces travaux de thèse :

$$\int_0^R \rho J_0(x\rho) d\rho = R \frac{J_1(Rx)}{x} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} \int_0^R \rho J_\alpha(x\rho) J_\alpha(y\rho) d\rho = R \frac{x J_{\alpha+1}(Rx) J_\alpha(Ry) - y J_{\alpha+1}(Ry) J_\alpha(Rx)}{x^2 - y^2} \\ \int_0^R \rho J_\alpha(x\rho)^2 d\rho = \frac{R^2}{2} (J_\alpha(Rx)^2 - J_{\alpha-1}(Rx) J_{\alpha+1}(Rx)) \end{cases} \quad (2.22)$$

Définition 4 Une seconde solution de l'équation (2.18) peut être exhibée, la fonction de Bessel de deuxième espèce. Elle est notée pour $Y_\alpha(x)$ et $\alpha \notin \mathbb{Z}$:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\pi\alpha) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)} \quad (2.23)$$

Lorsque $n \in \mathbb{Z}$ on a la solution de l'équation (2.18) :

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x) \quad (2.24)$$

La fonction de Bessel de deuxième espèce $Y_\alpha(x)$ diverge lorsque $x \rightarrow 0$, car c'est une combinaison linéaire de $J_\alpha(x)$ et $J_{-\alpha}(x)$, ainsi que $\text{Re}(\alpha)$ soit positif ou négatif l'une ou l'autre des fonctions de Bessel diverge en $x = 0$. Pour $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ un calcul de limite montre que $Y_n(x)$ diverge également pour $x \rightarrow 0$. C'est la raison pour laquelle elle n'a pas été utile dans le contexte de cette thèse (cylindre plein), mais doit être employée dès lors que le domaine d'étude a des "trous".

Quoique la fonction de Bessel J_α est correctement définie pour des variables complexes, il est commode de définir une fonction de Bessel modifiée pour les variables imaginaires pures. Ainsi on adopte la définition suivante :

Définition 5 La fonction de Bessel modifiée de première espèce est définie par :

$$I_\alpha(x) = i^{-\alpha} J_\alpha(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha + k + 1)} \quad (2.25)$$

Si $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$, alors il vient que le premier terme du développement diverge lorsque $x \rightarrow 0$. Par ailleurs la fonction Γ n'est pas définie pour des entiers négatifs ou nuls, ainsi la définition précédente n'est pas directement utilisable dans le cas où $\alpha = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce dernier cas nous adoptons la définition :

$$I_n(x) = I_{-n}(x) \quad (2.26)$$

La fonction de Bessel modifiée de première espèce vérifie l'équation différentielle :

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} - \left(1 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2\right)y(x) = 0 \quad (2.27)$$

Cette équation (2.27) est invariante pour $-\alpha$, ainsi $I_{-\alpha}$ est également solution. Si α n'est pas un entier, I_α et $I_{-\alpha}$ sont deux solutions non proportionnelles. En revanche si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ alors la définition devient $I_n(x) = I_{-n}(x)$.

Par ailleurs nous reportons ici une intégrale utile à la résolution des problèmes pratiques de ces travaux de thèse :

$$\begin{cases} \int_0^R \rho I_\alpha(x\rho) I_\alpha(y\rho) d\rho = R \frac{x I_{\alpha+1}(Rx) I_\alpha(Ry) - y I_{\alpha+1}(Ry) I_\alpha(Rx)}{x^2 - y^2} \\ \int_0^R \rho I_\alpha(x\rho)^2 d\rho = \frac{R^2}{2} (I_\alpha(Rx)^2 - I_{\alpha-1}(Rx) I_{\alpha+1}(Rx)) \end{cases} \quad (2.28)$$

Définition 6 Une seconde solution de l'équation (2.27) peut être exhibée, la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce. Elle est notée $K_\alpha(x)$ et :

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2 \sin(\pi\alpha)} (I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)) \quad (2.29)$$

La fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce $K_\alpha(x)$ diverge lorsque $x \rightarrow 0$, car c'est une combinaison linéaire de $I_\alpha(x)$ et $I_{-\alpha}(x)$, ainsi que $\operatorname{Re}(\alpha)$ soit positif ou négatif l'une ou l'autre des fonctions de Bessel diverge en $x = 0$. Pour $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ un calcul de limite montre que $Y_n(x)$ diverge également pour $x \rightarrow 0$. C'est la raison pour laquelle elle n'a pas été utile dans le contexte de cette thèse (cylindre plein), mais doit être employée dès lors que le domaine d'étude a des "trous".

2.2.6. Analyse de Fourier-Bessel

Un résultat analogue au développement en série de Fourier existe pour les fonctions de Bessel et est appelé développement en série de Fourier-Bessel.

Théorème 2 Soit $R > 0$, si $\lambda_p^{(\alpha)}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) désignent les racines positives de $J_\alpha(x)$ classées par ordre croissant, et si f est une fonction continue de $r \in [0, R[$ à valeurs dans \mathbb{R} , alors :

$$\forall r \in [0, R[, f(r) = \sum_{p=1}^{\infty} \hat{f}_p J_\alpha\left(\lambda_p^{(\alpha)} \frac{r}{R}\right) \quad (2.30)$$

où l'on a :

$$\hat{f}_p = \frac{2}{R^2 J_{\alpha+1}^2\left(\lambda_p^{(\alpha)}\right)} \int_0^R \rho f(\rho) J_\alpha\left(\lambda_p^{(\alpha)} \frac{\rho}{R}\right) d\rho \quad (2.31)$$

Ainsi $J_\alpha\left(\lambda_p^{(\alpha)} \frac{r}{R}\right)$ forment une base orthogonale de l'espace des fonctions continues de $[0, R[$ dans \mathbb{R} . Si f est discontinue en un point ζ , la série de Fourier-Bessel converge au milieu de la discontinuité :

$$\frac{f(\zeta^-) + f(\zeta^+)}{2} \quad (2.32)$$

Un second développement de Fourier-Bessel, nommé série de Dini est souvent utile :

Théorème 3 Soit $R > 0$ et $\alpha \geq -1/2$, si $\gamma_p^{(\alpha)}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) désignent les racines positives de $xJ'_\alpha(x) + HJ_\alpha(x)$ (où H est une constante arbitraire de \mathbb{R}) classées par ordre croissant, et si f est une fonction de $r \in [0, R]$ à valeurs dans \mathbb{R} , alors :

$$f(r) = \sum_{p=1}^{\infty} f_p^* J_\alpha \left(\gamma_p^{(\alpha)} \frac{r}{R} \right) \quad (2.33)$$

où l'on a :

$$f_p^* = \frac{2 \left(\gamma_p^{(\alpha)} \right)^2}{R^2 \left(H^2 + \left(\gamma_p^{(\alpha)} \right)^2 - \alpha^2 \right) J_\alpha^2 \left(\gamma_p^{(\alpha)} \right)} \int_0^R \rho f(\rho) J_\alpha \left(\gamma_p^{(\alpha)} \frac{\rho}{R} \right) d\rho \quad (2.34)$$

Si $H + \alpha = 0$, alors le premier zéro de $xJ'_\alpha(x) + HJ_\alpha(x)$ est à l'origine, et le dénominateur de f_1^* est donc nul. Dans ce cas, le premier terme f_1^* s'exprime différemment des autres :

$$\frac{2}{R^2} (\alpha + 1) \left(\frac{r}{R} \right)^\alpha \int_0^R \rho^{\alpha+1} f(\rho) d\rho \quad (2.35)$$

Ainsi $J_\alpha \left(\gamma_p^{(\alpha)} \frac{r}{R} \right)$ forment une base orthogonale de l'espace des fonctions de $[0, R]$ dans \mathbb{R} .

2.2.7. Polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux sont une autre grande famille de fonctions permettant de donner une forme analytique à une suite de points définie par des mesures. Une classe très générale de polynômes orthogonaux est liée au nom de Jacobi.

Définition 7 On appelle polynômes de Jacobi, si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de degré n suivant :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix} ; \frac{1-x}{2} \right) \quad (2.36)$$

Une formulation équivalente est donnée par :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + m + 1)}{\Gamma(\alpha + m + 1)} \left(\frac{x-1}{2} \right)^m \quad (2.37)$$

Les dérivées d'ordre $k \leq n$ des polynômes de Jacobi s'obtiennent par :

$$\frac{d^k}{dx^k} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1 + k)}{2^k \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} P_{n-k}^{(\alpha+k, \beta+k)}(x) \quad (2.38)$$

Il est aisé de vérifier que les polynômes de Jacobi sont solutions de l'équation différentielle d'ordre deux suivante :

$$(1-x^2)y''(x) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y'(x) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(x) = 0 \quad (2.39)$$

Les polynômes de Jacobi sont orthogonaux relativement à la fonction poids $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, nous avons :

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \delta_{n,m} \kappa(n, \alpha, \beta) \quad (2.40)$$

où l'on a :

$$\kappa(n, \alpha, \beta) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1) n!} \quad (2.41)$$

Les polynômes de Jacobi permettent un développement du type Fourier (généralisé), nous avons le théorème suivant :

Théorème 4 Soit $f(x)$ une fonction de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} et continument dérivable, alors :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (2.42)$$

où l'on a :

$$f_n = \frac{1}{\kappa(n, \alpha, \beta)} \int_a^b \left(1 - \frac{2x - a - b}{b - a}\right)^\alpha \left(1 + \frac{2x - a - b}{b - a}\right)^\beta f(x) P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right) dx \quad (2.43)$$

De plus si f est discontinue (et admettant une dérivée à gauche et à droite) en un point ζ , alors la somme de polynômes de Jacobi converge vers le milieu de la discontinuité :

$$\frac{f(\zeta^-) + f(\zeta^+)}{2} \quad (2.44)$$

Si f est seulement de carré intégrable, la convergence de la série en polynômes de Jacobi vers $f(x)$ est vraie en norme \mathcal{L}^2 .

Des polynômes orthogonaux célèbres liés aux noms de Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Gegenbauer etc... sont issus des polynômes de Jacobi. Nous n'explicitons dans ces pages que les polynômes de Chebyshev et Legendre du fait de leur rôle important dans le développement analytique de données mesurées et dans l'analyse des fonctions harmoniques qui seront particulièrement utilisées par la suite.

Définition 8 Les polynômes de Chebyshev de première espèce sont définis sur $[-1, 1]$ par :

$$T_n(x) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x) \quad (2.45)$$

et vérifient l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2y(x) = 0 \quad (2.46)$$

Les polynômes de Chebyshev de seconde espèce sont définis sur $[-1, 1]$ par :

$$U_n(x) = \frac{2^{2n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} P_n^{(1/2, 1/2)}(x) \quad (2.47)$$

et vérifient l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) + n(n+2)y(x) = 0 \quad (2.48)$$

Les polynômes de Chebyshev sont remarquables pour la relation :

$$\begin{cases} T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \\ U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \end{cases} \quad (2.49)$$

Il est clair que si le Théorème 4 doit être utilisé avec les polynômes de Chebyshev de première espèce alors on a :

$$f_n = \frac{2}{\pi(1 + \delta_{n,0})} \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right)^2}} T_n\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right) dx \quad (2.50)$$

Grâce à ce résultat il devient clair qu'en faisant le changement de variable $\cos(\theta) = (2x - a - b)/(b - a)$ alors on obtient :

$$f_n = \frac{b - a}{2\pi(1 + \delta_{n,0})} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{(b - a)\cos(\theta) + a + b}{2}\right) \cos(n\theta) d\theta \quad (2.51)$$

Cette formulation donne aux polynômes de Chebyshev leur efficacité, en effet, les intégrales nécessaires au développement en série se ramène à un calcul de fft. Cependant les polynômes de Legendre jouent un rôle central dans l'analyse des fonctions harmoniques, il convient donc de les mentionner ici.

Définition 9 Les polynômes de Legendre de première espèce sont définis par :

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x) \quad (2.52)$$

et vérifient l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0 \quad (2.53)$$

Les polynômes de Legendre sont donc orthogonaux avec une fonction poids unitaire soit :

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \delta_{n,m} \frac{2}{2n+1} \quad (2.54)$$

Si le théorème 4 doit être utilisé avec les polynômes de Legendre alors on a :

$$f_n = \frac{2n+1}{2} \int_a^b f(x)P_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)dx \quad (2.55)$$

Des développements récents de Iserles (2011) permettent de calculer ces intégrales grâce à un algorithme très rapide utilisant des calculs de fft et un post-processing en $\mathcal{O}(N)$, ce qui rend les polynômes de Legendre de plus en plus accessibles pour des calculs en temps réel visant à donner une forme analytique à des points de mesures.

L'équation différentielle (2.53) vérifiée par les polynômes de Legendre a une seconde solution appelée fonction de Legendre.

Définition 10 La fonction de Legendre est définie par :

$$Q_n(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) P_n(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(x)P_{n-k}(x) \quad (2.56)$$

La fonction de Legendre est singulière en $x = \pm 1$, ce qui limite son utilisation aux problèmes où ces valeurs sont hors du domaine à étudier. De plus des fonctions très utiles pour l'analyse harmonique sont dérivées des polynômes et des fonctions de Legendre et sont appelées fonctions associées de Legendre de première et seconde espèce.

Définition 11 On appelle fonction associée de Legendre de première espèce :

$$P_m^n(x) = (-1)^n (1-x^2)^{n/2} \frac{d^n}{dx^n} P_m(x) \quad (2.57)$$

On appelle fonction associée de Legendre de seconde espèce :

$$Q_m^n(x) = (-1)^n (1-x^2)^{n/2} \frac{d^n}{dx^n} Q_m(x) \quad (2.58)$$

Les fonctions associées de Legendre de première et seconde espèces vérifient l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left(m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2}\right)y(x) = 0 \quad (2.59)$$

Les polynômes orthogonaux sont très employés dans la recherche de solutions analytiques. Cependant, dans ces travaux de thèse, il est apparu que les développements en série de Fourier étaient souvent plus efficaces. Par exemple pour le problème inverse élastique tridimensionnel traité au chapitre 9, les signaux sont développés en série de Fourier non seulement selon la coordonnée angulaire θ mais aussi selon l'axe du cylindre z , alors qu'un développement en série de Legendre aurait également été opportun. Cela est dû à la grande simplicité des équations résultant des séries de Fourier. Cependant dans ce cas précis, les polynômes de Legendre ont également été utilisés pour identifier les termes d'amorce (où premiers termes) par comparaison aux termes courants dans les développements.

2.3. Fonctions harmoniques et bi-harmoniques

L'étude des fonctions harmoniques est majeure en physique en générale. En effet la théorie des potentiels harmoniques recouvre presque tous les champs de la physique, en particulier l'élasticité. Ainsi, les fonctions harmoniques (et bi-harmoniques) seront intensivement utilisées dans les développements analytiques inverses qui suivent. Nous posons les systèmes de coordonnées cartésien, cylindrique et sphérique comme la figure 2.1 le précise.

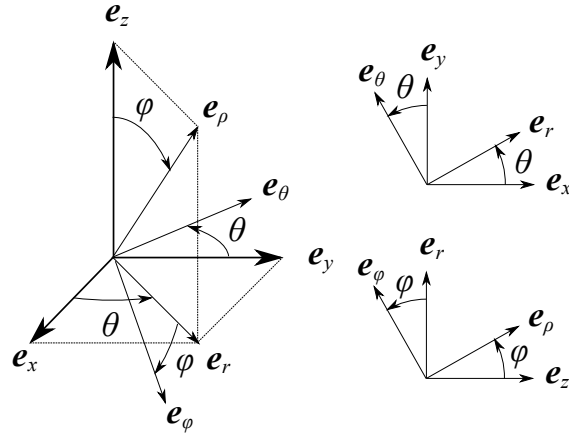


FIGURE 2.1 – Système de coordonnées

Définition 12 On dit qu'une fonction de $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ à valeur dans \mathbb{R} est harmonique si elle vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0 \quad (2.60)$$

En particulier nous avons en dimension 2 l'équation de Laplace écrite respectivement en coordonnées cartésiennes et cylindriques :

$$\begin{cases} \Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \Delta f(r, \theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \end{cases} \quad (2.61)$$

En particulier nous avons en dimension 3 l'équation de Laplace écrite respectivement en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques :

$$\begin{cases} \Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \Delta f(r, \theta, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \Delta f(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot(\varphi)}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (2.62)$$

2.3.1. Harmoniques sphériques

L'équation de Laplace en sphérique est simplifiée, si l'on cherche la solution sous forme $f_n(\rho, \varphi) \exp(in\theta)$. Par ailleurs il convient de poser le changement de variable $x = \cos(\varphi)$, il est alors obtenu que la fonction inconnue $f_n(\rho, x)$ doit vérifier l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f_n}{\partial \rho} - \frac{n^2 f_n}{\rho^2 (1 - x^2)} - \frac{2x}{\rho^2} \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{1 - x^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} = 0 \quad (2.63)$$

Cette dernière équation peut se résoudre en cherchant les solutions de la forme $f_n(\rho, x) = \rho^m f_{n,m}(x)$ ou de la forme $f_n(\rho, x) = (1/\rho^{m+1}) f_{n,m}(x)$, il est alors obtenu, dans les deux cas, l'équation différentielle sur $f_{n,m}(x)$:

$$(1 - x^2)f_{n,m}''(x) - 2xf_{n,m}'(x) + \left(m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2}\right)f_{n,m}(x) = 0 \quad (2.64)$$

Il s'agit de l'équation de Legendre associée (2.59), dont les solutions sont connues et sont les fonctions de Legendre de première et seconde espèce. Dans le cas particulier $n = 0$ cette équation se réduit à l'équation de Legendre (2.53) et dont les solutions sont les polynômes et les fonctions de Legendre. Ainsi nous définissons les harmoniques sphériques.

Définition 13 Les fonctions suivantes sont harmoniques en coordonnées sphériques et sont appelées harmoniques sphériques :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} \rho^m P_m^n(\cos(\varphi)) \exp(in\theta) \\ \rho^m Q_m^n(\cos(\varphi)) \exp(in\theta) \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{1}{\rho^{m+1}} P_m^n(\cos(\varphi)) \exp(in\theta) \\ \frac{1}{\rho^{m+1}} Q_m^n(\cos(\varphi)) \exp(in\theta) \end{array} \quad (2.65)$$

Du fait que l'équation est linéaire, il est possible de sommer ces solutions, ainsi les exponentielles peuvent être remplacées par des cosinus ou des sinus.

2.3.2. Fonctions harmoniques en cylindrique

Il est évidemment possible d'écrire les harmoniques sphériques en coordonnées cylindriques, on obtient alors les fonctions harmoniques suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} (r^2 + z^2)^{\frac{m}{2}} P_m^n\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right) \exp(in\theta) \\ (r^2 + z^2)^{\frac{m}{2}} Q_m^n\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right) \exp(in\theta) \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{m+1}{2}}} P_m^n\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right) \exp(in\theta) \\ \frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{m+1}{2}}} Q_m^n\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right) \exp(in\theta) \end{array} \quad (2.66)$$

Cependant, il est difficile de voir sous cette forme qu'il s'agit (dans le cas des fonctions de première espèce) de polynômes en r et z . Ainsi nous présentons également des fonctions harmoniques, dérivées de celles-ci dont l'expression polynomiale est explicitée. Pour cela nous utilisons le fait que si $f_n(r, z) \exp(in\theta)$ est harmonique alors la fonction $f_{n+1}(r, z) \exp(i(n+1)\theta)$ définie par (2.67) l'est aussi :

$$f_{n+1}(r, z) = \frac{\partial f_n(r, z)}{\partial r} - \frac{nf_n(r, z)}{r} \quad (2.67)$$

Ainsi on trouve en prenant $f_0(r, z)$ (pour $n = 0$) l'une des fonctions harmoniques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(r, z) = (r^2 + z^2)^k P_{2k}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right) \\ \text{ou} \\ f_0(r, z) = (r^2 + z^2)^{\frac{2k+1}{2}} P_{2k+1}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right) \end{array} \right. \quad (2.68)$$

que $X_k^n(r, z) \exp(in\theta)$ et $Y_k^n(r, z) \exp(in\theta)$ sont des fonctions harmoniques polynômiales en r et z :

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq n \leq N \\ n \leq k \leq K \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} X_k^n(r, z) = \sum_{j=0}^{k-n} x_{k,j}^n r^{2(k-j)-n} z^{2j} \\ Y_k^n(r, z) = \sum_{j=0}^{k-n} y_{k,j}^n r^{2(k-j)-n} z^{2j+1} \end{array} \right. \quad (2.69)$$

où :

$$\begin{cases} 0 \leq n \leq N \\ n \leq k \leq K \\ 0 \leq j \leq k - n \end{cases}, \begin{cases} x_{k,j}^n = \frac{(-1)^{j+k} (2k)!}{2^{2(k-j)-n} (k-n-j)! (2j)! (k-j)!} \\ y_{k,j}^n = \frac{2k+1}{2j+1} x_{k,j}^n \end{cases} \quad (2.70)$$

Les polynômes en r et z , $X_k^n(r, z)$ et $Y_k^n(r, z)$ sont très utiles pour la résolution de problèmes d'élasticité en coordonnées cylindriques, ils sont par exemple utilisés au chapitre 9, pour l'obtention de certains termes.

Par ailleurs, en cherchant la solution de l'équation de Laplace sous la forme $f(r)g(z)\exp(in\theta)$ on obtient facilement les solutions suivantes :

$$\forall \delta \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z} \begin{cases} J_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) \\ Y_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) \\ I_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) \\ K_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) \end{cases} \quad (2.71)$$

Il est assez aisé de voir que les fonctions suivantes sont bi-harmoniques :

$$\begin{array}{l|l} rJ'_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) & J_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) \\ rY'_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) & Y_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) \\ rI'_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) & I_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) \\ rK'_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) & K_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) \end{array} \quad (2.72)$$

Ce type de solutions est utilisé au chapitre 9, pour l'obtention des termes courants.

Les solutions sont cherchées le plus souvent sous forme de séries, mais des formes intégrales sont également répandues dans la recherche de facteurs d'intensité de contrainte pour les problèmes de fissuration où les problèmes de contact, ou plus généralement dans le champs de la physique mathématique pour tous les problèmes de valeurs frontières mixtes dans la théorie des potentiels comme le montre le livre de Sneddon (1966). Cette méthode fait intervenir la résolution d'équations intégrales duales dont on trouve un grand nombre d'exemples dans les livres de Sneddon (1966), Sneddon and Lowengrub (1969), Mandal and N. (1999) ou encore le handbook de Polyanin and Manzhirov (2008). On cherche à identifier un potentiel harmonique $F(r, \theta, z)$ en introduisant un potentiel de couche $f(\delta)$ grâce à la formulation :

$$F(r, \theta, z) = \left(\int_0^{+\infty} f(\delta) J_\alpha(\delta r) \exp(\delta z) d\delta \right) \exp(in\theta) \quad (2.73)$$

2.3.3. Fonctions harmoniques et bi-harmoniques en deux dimensions

Il est clair que l'équation de Laplace peut être résolue en considérant des solutions du type $f_n(r)\exp(in\theta)$, car l'équation se simplifie en :

$$f_n''(r) + \frac{f_n'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} f_n(r) = 0 \quad (2.74)$$

Cette dernière équation admet pour solution générale ($n \geq 1$) $f_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$ et pour $n = 0$ $f_0 = A \ln(r)$. Ainsi les fonctions harmoniques bi-dimensionnelles sont :

$$f(r, \theta) = A + A_0 \ln(r) + \sum_{n \geq 1} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \exp(in\theta) \quad (2.75)$$

De la même manière les fonctions bi-harmoniques sont :

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= A + A_{01} \ln(r) + A_{02} r^2 + A_{03} r^2 \ln(r) + (A_{01} r \ln(r) + A_{02} r + A_{03} r^{-1} + A_{04} r^3) \exp(i\theta) \\ &+ \sum_{n \geq 2} (A_n r^n + B_n r^{-n} + A_n r^{n+2} + B_n r^{-n+2}) \exp(in\theta) \end{aligned} \quad (2.76)$$

2.4. Intégrales de frontière

Les solutions se présentant sous forme d'intégrales de frontière n'ont pas été utilisées dans ces travaux. La raison en est que dans le cadre des méthodes inverses, nous cherchons à étendre par continuité la solution au-delà de la frontière. Dans le cas d'intégrales de frontière ce prolongement ne permet pas, en général, de connaître les champs hors du domaine d'intégration. Nous donnons un exemple emprunté à l'élasticité plane pour nous en convaincre. Supposons que nous mesurons les composantes σ_{rr}^m et $\sigma_{r\theta}^m$ du tenseur des contraintes dans un disque élastique noté \mathcal{D} de rayon R_s , supposons que cette mesure soit faite au rayon $R_m < R_s$ (mesure sur tout un cercle noté $\partial\mathcal{C}$). On définit \mathcal{C} le disque de rayon R_m . Nous verrons au chapitre 3 que les contraintes peuvent s'écrire dans \mathcal{D} sous la forme :

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \phi'(z) - e^{2i\theta}\psi'(z) - \bar{z}e^{2i\theta}\phi''(z) + \overline{\phi'(z)} \quad (2.77)$$

où les potentiels $\phi'(z)$ et $\psi'(z)$ sont des fonctions holomorphes définies sur \mathcal{D} donc a fortiori sur \mathcal{C} (la définition de l'holomorphic est précisée au chapitre 3). Nous avons un très puissant outil d'analyse complexe à notre disposition présenté par Vekua (1964) : le problème de Cauchy :

Théorème 5 Soit $\partial\mathcal{C}$ un arc paramétrique orienté de classe \mathcal{C}^1 et soit $g : \begin{cases} \partial\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \rightarrow g(t) \end{cases}$ une fonction définie sur la ligne $\partial\mathcal{C}$ et intégrable sur cette ligne. Alors les conditions (i) et (ii) sont équivalentes :

$$(i) : \begin{cases} f(z) \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C} - \partial\mathcal{C} \\ \lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = C \\ \forall t \in \partial\mathcal{C}, f(t^+) - f(t^-) = g(t) \end{cases}$$

$$(ii) : f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{g(t)}{t-z} dt + C$$

Nous cherchons à utiliser le théorème de Cauchy, pour cela nous devons faire apparaître une discontinuité de fonction holomorphe. Cependant la fonction $z \rightarrow \overline{\phi'(z)}$ n'est pas holomorphe. On pose donc la fonction holomorphe sur l'extérieur du domaine \mathcal{C} (notée $\overline{\phi'} = \mathbb{C} - \mathcal{C}$) :

$$\overline{\phi'} : z \rightarrow \overline{\phi' \left(\frac{R_m^2}{\bar{z}} \right)} \quad (2.78)$$

On note z^+ un élément $z \in \mathcal{C}$ tel que $|z| \rightarrow R_m$ par valeurs inférieures. On note $z^- = R_m^2/\bar{z}^+$. Ainsi nous avons $|z^-| \rightarrow R_m$ par valeurs supérieures. Par ailleurs, nous avons $\sigma_{rr}(z^+) = \sigma_{rr}^m$ et $\sigma_{r\theta}(z^+) = \sigma_{r\theta}^m$. Ainsi nous pouvons écrire :

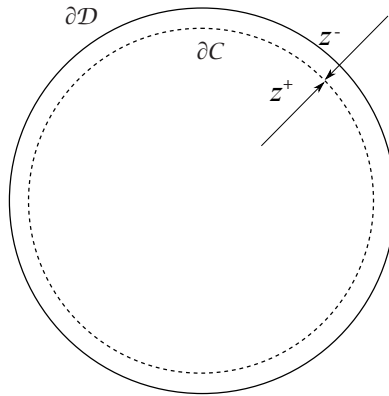


FIGURE 2.2 – Cercle de discontinuité

$$\sigma_{rr}^m - i\sigma_{r\theta}^m = \phi'(z^+) - \left(\frac{z^+}{R_m} \right)^2 \psi'(z^+) - z^+ \phi''(z^+) + \overline{\phi'}(z^-) \quad (2.79)$$

Posons la fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \partial\mathcal{C}$ suivante :

$$\Omega : z \rightarrow \begin{cases} \phi'(z) - \frac{z^2}{R_m^2} \psi'(z) - z\phi''(z) & z \in \mathcal{C} - \partial\mathcal{C} \\ -\overline{\phi}'(z) & z \in \overline{\mathcal{C}} - \partial\mathcal{C} \end{cases} \quad (2.80)$$

Nous avons immédiatement :

$$\Omega(z^+) - \Omega(z^-) = \sigma_{rr}^m - i\sigma_{r\theta}^m \quad (2.81)$$

Étudions le comportement à l'infini de $\Omega(z)$. $\phi'(z)$ est bien défini sur \mathcal{C} , ainsi $\phi'(0) = a_0 \in \mathbb{C}$. Donc le comportement à l'infini de $\Omega(z)$ est :

$$\Omega(z) \underset{|z| \rightarrow +\infty}{=} -\overline{\phi}'(z) = -\overline{\phi' \left(\frac{R_m^2}{\overline{z}} \right)} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} -\overline{a_0} \quad (2.82)$$

D'où :

$$\Omega(z) + \overline{a_0} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0 \quad (2.83)$$

Or on a d'après ce qui précède :

$$(\Omega + \overline{a_0})(z^+) - (\Omega + \overline{a_0})(z^-) = \sigma_{rr}^m - i\sigma_{r\theta}^m \quad (2.84)$$

Il s'agit donc d'un problème de Cauchy, nous avons donc le résultat suivant :

$$\Omega(z) = -\overline{a_0} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{C}} \frac{\sigma_{rr}^m(t) - i\sigma_{r\theta}^m(t)}{t - z} dt \quad (2.85)$$

De cette équation nous déduisons $-\overline{\phi}'(z)$ sur $\overline{\mathcal{C}} - \partial\mathcal{C}$ donc $\phi'(z)$ sur $\mathcal{C} - \partial\mathcal{C}$ grâce à la définition de $\overline{\phi}'(z)$ (2.78). Nous obtenons $\phi''(z)$ par simple dérivation et nous déduisons alors $\psi'(z)$ grâce à la définition de $\Omega(z)$ (2.80). Nous en déduisons alors le champs de contrainte partout dans \mathcal{C} grâce à l'équation (2.77).

Ainsi nous pouvons écrire le problème d'élasticité comme une intégrale de frontière à noyau singulier dont l'intégrande fait intervenir les contraintes mesurées au rayon R_m . Cependant, il est clair que si l'on cherche à étendre cette solution par continuité vers $\partial\mathcal{D}$, nous n'obtenons que $-\overline{\phi}'(z)$, qui n'est autre que $\phi'(z)$ dans \mathcal{C} . Fondamentalement cela est du au fait qu'une intégrale de frontière ne traduit que la valeur des champs dans le domaine d'intégration, ceci s'exprime de manière analogue à la propriété de la valeur moyenne pour les fonctions harmoniques. Ainsi des développements en série ont été préférés à ce genre de solutions, qui conduisent dans le cas des problèmes inverses à une impasse.

PART A

MÉTHODES INVERSES EN DEUX DIMENSIONS

CHAPITRE III

THERMO-ELASTICITÉ BIDIMENSIONNELLE

Dans ce chapitre, nous exposons les principaux résultats de l'élasticité plane isotrope. Les développements sont faits dans le corps des complexes \mathbb{C} conformément à la théorie de Muskhelishvili (1977), réexposée plus tard par Lu (1995).

Par ailleurs nous démontrons l'équation de la chaleur pour un corps tournant à partir d'un simple équilibre énergétique. Nous faisons cette démonstration, car il arrive souvent que les termes liés à la rotation du cylindre soient omis dans la littérature.

Nous démontrons, en compléments, les résultats dans le cas isotherme, principalement parce que par ce biais nous prouvons que la théorie des potentiels n'est pas une condition suffisante du type : tout potentiel vérifiant certaines conditions donne une solution du problème d'élasticité, mais une équivalence : la solution d'un problème d'élasticité linéaire peut toujours être exprimée en fonction de potentiels. Ceci résulte principalement du Lemme de Poincaré et du théorème de conjugué harmonique. Par ailleurs la preuve fait intervenir des théorèmes et propriétés fondamentales sur les fonctions holomorphes, qui seront utiles au chapitre 4. En complément le cours d'analyse complexe de Yger (2001) pourra être consulté avec profit. Ce chapitre peut aisément être passé pour un lecteur habitué à utiliser ces outils.

3.1. Résultat de Kolosov-Muskhelishvili

En élasticité plane dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, si la température s'écrit $T_0 \times (1 + \Theta)$ (sachant que T_0 est la température initiale où le corps élastique est libre de contraintes) les champs de contrainte et de déplacement s'écrivent sous forme de potentiels holomorphes (cf Sneddon and Lowengrub (1969)) :

$$\forall z \in \Omega, \begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \left(\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right) - \gamma \Theta(z, \bar{z}) \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2 \left(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) \right) - \gamma \int \frac{\partial \Theta}{\partial z} d\bar{z} \\ 2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\phi(z) - \overline{z\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \frac{\gamma}{2} \int \Theta(z, \bar{z}) dz \end{cases} \quad (3.1)$$

Le coefficient γ vaut $2(1 + \nu)\alpha T_0/(1 - \nu)$ en déformations planes et $2(1 + 2\nu)\alpha T_0$ en contraintes planes et le coefficient κ vaut $3 - 4\nu$ en déformations planes et $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ en contraintes planes, où ν est le coefficient de Poisson et α le coefficient de dilatation thermique. Ce résultat est extrêmement utile, et sert à la résolution du problème inverse élastique du chapitre 4. Cependant il est parfois judicieux de d'abord traiter le problème sous forme isotherme ($\Theta(z, \bar{z}) = 0$), puis de superposer un autre problème où l'on cherche les déplacements liés au gradient de température. Cette démarche a été adoptée pour les chapitres 4 (élasticité isotherme), 5 (détermination du champ de température) et 7 (couplage par superposition). Ceci est rigoureusement équivalent et conduit aux mêmes calculs, la superposition permet simplement de mieux discerner les efforts élastiques et les efforts thermiques, ce qui est intéressant pour calculer la fatigue thermique à la surface des cylindres de travail.

3.2. Equation de Navier avec second membre

Comme nous venons de le préciser, il sera utile dans la suite de déterminer le champ de déplacement lié à un gradient de température. Il nous faut établir pour cela l'équation de Navier avec un second membre en température, ce qui est équivalent à la formulation complexe (3.1). Nous introduisons le tenseur des déformations thermiques $\underline{\epsilon}^{th}$. Supposons qu'un corps élastique isotrope soit sujet à un champ de température $T(\mathbf{X})$, étant initialement relâché à la température uniforme T_0 , nous avons le système d'équation suivant, reliant le champ de déplacement \mathbf{u} , au tenseur des déformations totales $\underline{\epsilon}$ et au tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} = 0 & \text{(Equation d'équilibre)} \\ \underline{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} [\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^{th}] \mathbb{I} + 2\mu (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^{th}) & \text{(Loi de comportement)} \\ \underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \mathbf{u} + {}^t \underline{\nabla} \mathbf{u}) & \text{(Equation de compatibilité)} \\ \underline{\epsilon}^{th} = \alpha (T(\mathbf{X}) - T_0) \mathbb{I} & \text{(Comportement thermique)} \end{cases} \quad (3.2)$$

En réinjectant l'équation de compatibilité et la loi de comportement dans l'équation d'équilibre, il vient très facilement l'équation de Navier avec un second membre en température :

$$\lambda \nabla [\operatorname{div} \mathbf{u}] + \mu \operatorname{div} [\underline{\nabla} \mathbf{u} + {}^t \underline{\nabla} \mathbf{u}] = \alpha (3\lambda + 2\mu) \nabla T \quad (3.3)$$

3.3. Equation de la chaleur pour un solide tournant à vitesse constante

Dans cette section nous proposons d'exhiber une forme générale de l'équation de la chaleur sans source. En effet, la tôle plastifiée produit de la chaleur, qui est diffusée dans le cylindre, en revanche ce dernier ne produit pas de chaleur lui-même, nous considérons dès lors l'équation sans terme de source.

Le premier principe de la thermodynamique et la loi de Fourier donnent sur un volume arbitraire Ω , défini comme une tranche cylindrique d'épaisseur infinitésimale et de frontière $\partial\Omega$ (de normale \mathbf{n}).

$$\iint_{\partial\Omega} \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \rho c_p \frac{dT}{dt} d\tau \quad (3.4)$$

où λ ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) est la conductivité thermique, ρ (kg/m^3) la densité et c_p ($\text{W.s.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$) la capacité thermique et sont a priori des fonctions de la température T . Par ailleurs dT/dt est la dérivée complète par rapport à t , en effet les variables d'espace dépendent de t et donc $dT/dt \neq \partial T/\partial t$. Par ailleurs si l'on note \mathbf{v} la vitesse des particules à la frontière nous avons :

$$\iint_{\partial\Omega} \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV + \iint_{\partial\Omega} \rho c_p T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.5)$$

Le théorème de Stokes donne :

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\lambda \nabla T) dV = \iiint_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV + \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) dV \quad (3.6)$$

Nous avons choisi Ω arbitrairement, cela nous autorise à écrire l'égalité précédente sans l'intégration sur le volume, nous obtenons donc l'équation de la chaleur dans le cas général :

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) \quad (3.7)$$

Nous cherchons à développer l'équation (3.7), pour l'écrire en coordonnées polaires. Nous avons les formules de calcul formel suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(f \mathbf{X}) = f \operatorname{div}(\mathbf{X}) + \mathbf{X} \cdot \nabla f \\ \operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \end{cases} \quad (3.8)$$

Nous en déduisons :

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = \lambda \operatorname{div}(\nabla T) + (\nabla T)^2 \frac{d\lambda}{dT} \quad (3.9)$$

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 \right) \quad (3.10)$$

Et :

$$\operatorname{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) = \rho c_p T \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho c_p T) \quad (3.11)$$

$$\operatorname{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) = \rho c_p T \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\rho c_p \nabla T + \rho T \nabla c_p + T c_p \nabla \rho) \quad (3.12)$$

$$\operatorname{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) = \rho c_p T \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \left(\rho c_p + T \rho \frac{dc_p}{dT} + T c_p \frac{d\rho}{dT} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla T \quad (3.13)$$

Dans le cas d'un mobile tournant à la vitesse angulaire ω , nous avons la vitesse de la particule au rayon r : $\mathbf{v} = \omega r \mathbf{e}_\theta$ (notons que ω est supposé constant).

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \omega \operatorname{div}(r \mathbf{e}_\theta) = 0 \quad (3.14)$$

Nous obtenons pour le second terme de (3.7) :

$$\operatorname{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) = \omega \left(\rho c_p + T \rho \frac{dc_p}{dT} + T c_p \frac{d\rho}{dT} \right) \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (3.15)$$

En combinant les équations (3.7), (3.10) et (3.15) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 \right) = \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \omega \left(\rho c_p + T \rho \frac{dc_p}{dT} + T c_p \frac{d\rho}{dT} \right) \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Cette équation constitue l'équation de la chaleur complète écrite en polaire pour un corps 2D tournant autour de son origine à une vitesse angulaire ω constante. Dans le chapitre 5, nous considérons des propriétés thermiques indépendantes de la température¹. Ceci simplifie grandement l'écriture de l'équation de la chaleur, qui devient simplement :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (3.17)$$

où l'on a posé $D = \lambda / \rho c_p$ (m^2/s) la diffusivité thermique.

3.4. Famille de solutions

Nous exhibons une famille de solutions de cette équation très utile dans la pratique. Pour ce faire nous développons en série de Fourier, puis nous séparons les variables. En effet, la solution est à chaque instant 2π -périodique selon θ et peut donc être développée en série de Fourier (cf chapitre 2) :

$$T(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n(r, t) \exp(in\theta) \quad (3.18)$$

Le n ième coefficient de Fourier est recherché comme une fonction à variables séparables :

$$F_n(r, t) = f_n(r) g_n(t) \quad (3.19)$$

1. et une vitesse de rotation indépendante du temps au moins sur la durée d'un tour, ce qui revient à dire que l'évolution temporelle de la vitesse de rotation est faible devant la durée d'un tour

D'où en reportant dans (3.17) :

$$g_n(t) \left(f_n''(r) + \frac{1}{r} f_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} f_n(r) \right) = \frac{f_n(r)}{D} (g_n'(t) + i\omega n g_n(t)) \quad (3.20)$$

La condition $T(r, \theta, t) > 0$ est vérifiée (T exprimée en Kelvin) donc nous pouvons diviser par T , ce qui donne :

$$\left(f_n''(r) + \frac{1}{r} f_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} f_n(r) \right) \frac{1}{f_n(r)} = \frac{1}{D} \frac{1}{g_n(t)} (g_n'(t) + i\omega n g_n(t)) \quad (3.21)$$

Les deux termes égaux sont chacun des fonctions d'une seule variable (indépendantes l'une de l'autre), il existe donc un nombre complexe C tel que :

$$\begin{cases} f_n''(r) + \frac{1}{r} f_n'(r) - \left(C + \frac{n^2}{r^2} \right) f_n(r) = 0 \\ g_n'(t) + (i\omega n - DC) g_n(t) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Ainsi :

$$\begin{cases} f_n(r) = \gamma J_n(\sqrt{-C}r) \\ g_n(t) = \exp((DC - i\omega n)t) \end{cases} \quad (3.23)$$

où J_n est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n définie (cf chapitre 2) pour un argument complexe et γ est un nombre complexe arbitraire.

En introduisant $\tau = -1/(DC - i\omega n)$ nous obtenons la solution de (3.17) suivante :

$$\gamma J_n \left(\sqrt{\frac{1}{D\tau} - \frac{i\omega n}{D}} r \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \exp(in\theta) \quad (3.24)$$

3.5. Conclusion

Dans les cas d'application au laminage de l'acier, la variation des coefficients thermiques n'est pas suffisante pour que l'approximation de les supposer indépendants de la température soit critique, ceci est vérifié au chapitre 5. Cependant bien que ceci n'ait pas été abordé dans ces travaux de thèse, il est possible de linéariser l'équation de la chaleur même si les coefficients thermiques dépendent de la température, grâce au calcul asymptotique. L'idée consiste à écrire les coefficients thermiques sous la forme $D(T) = D_0(1 + \epsilon_0(T - T_0)/T_0)$ où T_0 est le champ de température que nous aurions si la diffusivité thermique était constante et égale à D_0 et le paramètre ϵ_0 est sans dimension et tel que $\epsilon_0 \ll 1$. Nous pouvons dès lors linéariser l'équation de la chaleur en écrivant la température sous forme $T = T_0 + \epsilon_0 T_1 + \dots + \epsilon_0^j T_1^j + \dots$ et en identifiant les termes en puissances de ϵ_0 . Cette approche pourra faire l'objet d'une étude particulière sur des cylindres de laminage dont les propriétés thermiques varient plus fortement en fonction de la température, notamment en laminage à chaud avec des refroidissements importants, où une importante gamme de température est atteinte.

Nous concluons ce chapitre avec un commentaire général sur la théorie des potentiels. Les problèmes d'élasticité sont traités comme le montre l'équation (3.1) grâce à des potentiels holomorphes (donc harmoniques). Le cas des problèmes de thermique est également traité grâce à la théorie des potentiels, mais de manière moins visible. En effet, faisons un parallèle entre l'élasticité et la thermique. Nous pouvons faire une analogie entre la température et le vecteur déplacement. Le gradient de la température n'est autre que le flux de chaleur (à une constante multiplicative près qui sert de loi de comportement), tandis que le tenseur des contraintes n'est autre que la partie symétrique du gradient du vecteur déplacement (à une constante multiplicative près, qui est un tenseur d'ordre quatre, étant la loi de comportement). Une analogie entre le flux de chaleur et le tenseur des contraintes peut donc être faite également. Ainsi de la même manière que l'on peut imposer les déplacements, nous pouvons imposer la température comme condition aux limites, et de la même manière que l'on peut imposer le vecteur contrainte (tenseur contracté avec la normale à la surface) on peut imposer le flux de chaleur contracté avec la normale à la surface.

Cependant la température a un double rôle, celui de déplacement et celui de potentiel scalaire. Cela est du au fait de la faible dimension du problème. Il est remarquable cependant que la dépendance temporelle (variable t

et vitesse de rotation ω) des problèmes thermiques font de ce potentiel une fonction non harmonique. Si le corps est immobile et en régime stationnaire (on parle plutôt d'équilibre pour un problème d'élasticité), alors l'analogie avec le problème d'élasticité s'étend à l'harmonicité du potentiel, comme on peut le voir à l'équation (3.17)

3.6. Compléments

3.6.1. Dans un domaine élastique simplement connexe

Cette section reprend la démonstration très classique du résultat (3.1) énoncé au début de ce chapitre, et pourra être passée rapidement. Ce complément est inséré dans le corps du texte et non dans les annexes, pour que les lecteurs peu familiers de l'analyse complexe puissent trouver les outils essentiels de la théorie des potentiels avant de lire l'utilisation que nous en faisons au chapitre 4. Il n'est cependant pas nécessaire de s'attarder sur ces pages.

Résoudre un problème d'élasticité linéaire isotrope sur un domaine d'élasticité Ω (où l'on néglige les forces de volume et d'inerties) revient à trouver l'unique couple de champs $(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon})$ de contrainte et déformation, vérifiant des conditions en déplacement \mathbf{u}^d sur une partie de la frontière $\partial\Omega_u$ et en vecteur contrainte \mathbf{T}^d sur le restant de la frontière $\partial\Omega_\sigma$ et vérifiant le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(\underline{\sigma}) = \mathbf{0} & \text{Equation d'équilibre} \\ \underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon}) \cdot \underline{\mathbf{1}} + 2\mu \underline{\epsilon} & \text{Loi de comportement isotrope} \\ \underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla}(\mathbf{u}) + {}^t \underline{\nabla}(\mathbf{u})) & \text{Equation de compatibilité} \\ (x, y, z) \in \partial\Omega_u, \mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}_d(x, y) & \text{Conditions aux limites en déplacement} \\ (x, y, z) \in \partial\Omega_\sigma, \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_d(x, y) & \text{Conditions aux limites en contraintes} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Si l'on travaille en déformation plane le tenseur des déformations vérifie :

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0 \quad (3.26)$$

La loi de comportement isotrope devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = \lambda\epsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \end{array} \right. \Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.27)$$

En revanche si l'on travaille en contraintes planes le tenseur des contraintes de Cauchy vérifie :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.28)$$

Et la loi de comportement impose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \\ \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \end{array} \right. \Rightarrow \epsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad (3.29)$$

D'où en posant $\lambda^* = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = (\lambda^* + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda^*\epsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = \lambda^*\epsilon_{xx} + (\lambda^* + 2\mu)\epsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Les systèmes (3.27) et (3.30) ont exactement la même structure, ainsi résoudre un problème en déformations planes ou en contraintes planes revient à résoudre les mêmes équations, il suffit de considérer λ en déformations planes et λ^* en contraintes planes.

Nous introduisons quelques concepts bien connus des mathématiques qui sont au coeur de la démonstration du résultat de Muskhelishvili (1977).

Définition 14 En dimension 2, une forme linéaire est une application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . L'espace des formes linéaires est engendré par :

$$dx : \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2) & \rightarrow h_1 \end{array} \right. \quad dy : \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2) & \rightarrow h_2 \end{array} \right.$$

Définition 15 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , on appelle forme différentielle de classe C^k toute application de classe C^k de Ω dans l'espace des formes linéaires \mathcal{F} telle que :

$$w : \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathcal{F} \\ (x, y) & \rightarrow P(x, y)dx + Q(x, y)dy \end{array} \right.$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont de classe C^k

Définition 16 Soit f une application de classe C^k de Ω (ouvert de \mathbb{R}^2) dans \mathbb{C} . On appelle différentielle de f la forme différentielle :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Nous énonçons le Lemme de Poincaré qui sera le point de départ de la démonstration, car il permet de justifier l'existence du potentiel d'Airy :

Théorème 6 Si Ω est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et $w(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ une forme différentielle de classe C^1 telle que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Alors w dérive d'un potentiel, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f(x, y)$ de Ω de classe C^2 telle que :

$$w = df$$

où :

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Un ouvert simplement connexe se comprend comme un ouvert connexe (en un seul morceau) sans trou. La figure 3.1 représente un ouvert simplement connexe et un ouvert non simplement connexe.

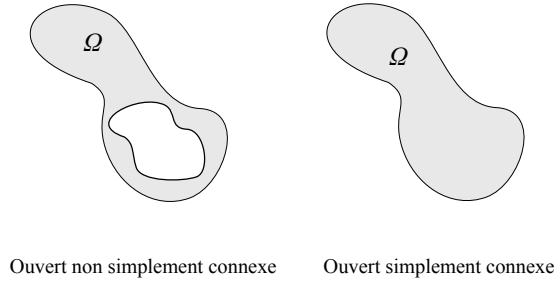


FIGURE 3.1 – Ouvert simplement connexe

Nous définissons les deux formes différentielles suivantes :

$$\begin{cases} w_1(x, y) = -\sigma_{xy}dx + \sigma_{xx}dy \\ w_2(x, y) = \sigma_{yy}dx - \sigma_{xy}dy \end{cases} \quad (3.31)$$

L'équation d'équilibre devient en déformations ou en contraintes planes :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (3.32)$$

Ainsi d'après le Lemme de Poincaré w_1 et w_2 dérivent de potentiels A et B :

$$\begin{cases} dB = \frac{\partial B}{\partial x}dx + \frac{\partial B}{\partial y}dy = -\sigma_{xy}dx + \sigma_{xx}dy \\ dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = \sigma_{yy}dx - \sigma_{xy}dy \end{cases} \quad (3.33)$$

De plus nous avons :

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \quad (3.34)$$

Ainsi d'après le Lemme de Poincaré $Adx + Bdy$ dérive d'un potentiel U :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = Adx + Bdy \quad (3.35)$$

D'où l'existence du **potentiel en contraintes d'Airy** défini par :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.36)$$

Ce résultat est essentiel dans la mesure où l'existence d'un tel potentiel est assuré, la recherche de solutions analytiques portera sur le potentiel lui-même et non sur les champs de contrainte ou de déplacement. Nous démontrons des propriétés fortes du potentiel d'Airy, afin que cette recherche de solution soit la plus ciblée possible. Nous avons l'équation de Navier, qui n'est rien d'autre que l'équation d'équilibre, où l'on a réinjecté la loi de comportement et l'équation de compatibilité :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) + \mu \Delta u_x = 0 \\ (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) + \mu \Delta u_y = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

D'où en dérivant par rapport à x la première ligne et par rapport à y la seconde :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} \right) + \mu \Delta \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \\ (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} \right) + \mu \Delta \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

En sommant les deux équations et en remarquant que les termes en facteurs de $(\lambda + \mu)$ sont des dérivées en x et en y de Laplaciens respectivement de u_y et u_x , puis en intervertissant les Laplaciens avec les dérivations, nous obtenons l'équation de Beltrami-Michell :

$$\Delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.39)$$

Par ailleurs, en écrivant la loi de comportement dans laquelle le tenseur des déformations est écrit en fonction des déplacements via l'équation de compatibilité nous obtenons :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (3.40)$$

D'où :

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (3.41)$$

Or il suit immédiatement de la définition du potentiel d'Airy U (3.36) que :

$$\Delta U = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \quad (3.42)$$

Ainsi grâce à (3.41) nous avons le résultat fondamental que le potentiel d'Airy est bi-harmonique, soit :

$$\Delta\Delta U = 0 \quad (3.43)$$

Nous avons vu au chapitre 2 des fonctions bi-harmoniques du plan. L'étude de certains problèmes est ainsi aisée par la recherche directe d'un potentiel d'Airy bi-harmonique comme série de ces fonctions (2.76). Cependant les outils d'analyse complexe, le lien entre l'harmonicité d'une part et l'holomorphicité d'autre part, ainsi que la résolution d'équations intégrales complexes à noyau singulier proposée par Muskhelishvili (1953) et Vekua (1964), conduisent à considérer un changement de variable complexe $z = x + iy$ pour profiter de ces puissants outils. Nous avons donc pour toute fonction $f(x, y)$ du plan \mathbb{R}^2 une fonction associée $\tilde{f}(z, \bar{z})$ (le symbole tilde sera omis par la suite pour des raisons de lisibilité) du plan complexe \mathbb{C} telle que :

$$f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = \tilde{f}(z, \bar{z}) \quad (3.44)$$

Nous obtenons grâce à un calcul différentiel simple :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}(z, \bar{z})}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (3.45)$$

En considérant $f(x, y) = x + iy$ et $f(x, y) = x - iy$ il apparaît que z et \bar{z} sont à entendre comme des variables indépendantes au sens de cette dérivation (3.45). Par ailleurs nous définissons les formes différentielles complexes à partir de la base de forme différentielle réelles dx et dy :

Définition 17 *L'espace des formes linéaires de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est engendré par les deux formes linéaire suivantes :*

$$dz = dx + idy, d\bar{z} = dx - idy \quad (3.46)$$

Par ailleurs nous avons besoin de définir une forme différentielle complexe d'une fonction.

Définition 18 *Soit f une application de classe C^k de Ω (ouvert de \mathbb{R}^2 assimilé à \mathbb{C}) dans \mathbb{C} . On appelle différentielle complexe de f la forme différentielle :*

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

L'équation de Laplace (2.61) dans \mathbb{R}^2 définie au chapitre 2 devient pour le double Laplacien du potentiel d'Airy :

$$\Delta\Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (3.47)$$

Cependant en considérant le changement de variable et la relation (3.45) on obtient dans le corps des complexes :

$$\Delta\Delta U = 16 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \quad (3.48)$$

On introduit l'outil majeur de la résolution des problèmes d'élasticité plans isotropes, la notion d'holomorphicité.

Définition 19 *On dit qu'une fonction $f(z)$ de $\Omega \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans \mathbb{C} est holomorphe si et seulement si elle est de classe C^1 sur Ω , et si pour tout $z \in \Omega$ la différentielle complexe de f s'écrit sous la forme :*

$$df = z \mapsto a(z)dz \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (3.49)$$

Les exemples types de fonctions holomorphes sur \mathbb{C} sont $z \mapsto z^n$ et sur \mathbb{C}^* $z \mapsto 1/z^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Il est aisé de constater que si $f(z)$ est une fonction holomorphe, alors sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des fonctions harmoniques de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Il existe une sorte de réciproque, il s'agit du deuxième théorème fondamental que nous utilisons : le théorème du conjugué harmonique.

Théorème 7 Soit Ω un ouvert simplement connexe de \mathbb{R}^2 assimilé à \mathbb{C} et soit P une fonction harmonique de Ω dans \mathbb{R} . Alors, il existe une fonction harmonique Q de Ω dans \mathbb{R} telle que $f = P + iQ$ est holomorphe sur Ω .

Pour utiliser ce dernier résultat, nous considérons le potentiel d'Airy U bi-harmonique, et nous introduisons le potentiel auxiliaire harmonique défini par :

$$P = \Delta U \quad (3.50)$$

D'après le théorème du conjugué harmonique il existe un autre potentiel Q harmonique tel que $f(z) = P + iQ$ est holomorphe sur Ω . Par ailleurs les fonctions holomorphes sont de classe C^∞ et admettent des primitives sur les ouverts simplement connexes, nous avons en particulier le résultat suivant :

Théorème 8 Soit Ω est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur Ω . Alors, il existe une fonction holomorphe $F(z)$ sur Ω telle que

$$F'(z) = f(z)$$

(au sens de la limite du taux d'accroissement)

$$\text{On note } F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

Grâce à ce théorème nous introduisons la primitive holomorphe $\phi(z)$ de la fonction holomorphe $f(z)$ divisée par quatre :

$$\phi(z) = \frac{1}{4} \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \text{Re}(\phi(z)) + i\text{Im}(\phi(z)) \quad (3.51)$$

Du fait de l'holomorphie de $\phi(z)$ on a de manière triviale :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} (P + iQ) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

D'où en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{Re}(\phi)}{\partial x} = \frac{\partial \text{Im}(\phi)}{\partial y} = \frac{1}{4} P = \Delta U \\ -\frac{\partial \text{Re}(\phi)}{\partial y} = \frac{\partial \text{Im}(\phi)}{\partial x} = \frac{1}{4} Q \end{cases} \quad (3.53)$$

Ainsi, nous avons intégré le potentiel P , mais il s'agit de résoudre un double Laplacien, il convient d'intégrer de nouveau. Nous posons pour cela le potentiel défini dans \mathbb{R}^2 :

$$p(x, y) = U - \text{Re}(\phi)x - \text{Im}(\phi)y \quad (3.54)$$

Un bref calcul de Laplacien donne :

$$\begin{cases} \Delta(\text{Re}(\phi)x) = x\Delta(\text{Re}(\phi)) + 2\frac{\partial \text{Re}(\phi)}{\partial x} = \frac{1}{2}P \\ \Delta(\text{Im}(\phi)y) = y\Delta(\text{Im}(\phi)) + 2\frac{\partial \text{Im}(\phi)}{\partial y} = \frac{1}{2}P \end{cases} \quad (3.55)$$

On obtient donc en se rapelant que $\Delta U = P$:

$$\Delta p = \Delta U - \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}P = 0 \quad (3.56)$$

Ainsi $p(x, y)$ est harmonique, d'après le théorème du conjugué harmonique il existe $q(x, y)$ harmonique de Ω dans \mathbb{R} telle que $\xi(z) = p + iq$ est holomorphe sur Ω . Nous avons donc :

$$\begin{cases} p = \text{Re}(\xi(z)) \\ q = \text{Im}(\xi(z)) \end{cases} \quad (3.57)$$

Ainsi en réécrivant U grâce à (3.54) et en tenant compte de (3.57) on a :

$$U = \operatorname{Re}(\xi(z)) + \operatorname{Re}(\phi(z))x + \operatorname{Im}(\phi(z))y \quad (3.58)$$

Nous avons finalement le résultat en complexes :

$$U = \operatorname{Re}(\xi(z) + \bar{z}\phi(z)) = \frac{1}{2} \left(\xi(z) + \bar{z}\phi(z) + \overline{\xi(z)} + z\overline{\phi(z)} \right) \quad (3.59)$$

Le potentiel d'Airy s'exprime donc comme la partie réelle d'une combinaison de potentiels holomorphes (avec un \bar{z}). Pour achever la démonstration il convient de remarquer qu'en combinant l'équation d'équilibre et la définition du potentiel d'Airy (3.36) en fonction des contraintes on obtient :

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \Delta U \\ 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \Delta U \end{aligned} \quad (3.60)$$

Grâce à la première ligne de (3.53) on a immédiatement :

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\partial \operatorname{Re}(\phi)}{\partial x} \\ 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\partial \operatorname{Im}(\phi)}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Grâce à une intégration directe on a :

$$\begin{aligned} 2\mu u_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \operatorname{Re}(\phi) + f_1(y) \\ 2\mu u_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \operatorname{Im}(\phi) + f_2(x) \end{aligned} \quad (3.62)$$

En dérivant u_x par y et u_y par x et en sommant les deux équations, il vient que $-f_1'(y) = f_2'(x) = c_0 \in \mathbb{R}$ (il faut tenir compte de la loi de comportement pour le terme de gauche $2\mu \epsilon_{xy} = \sigma_{xy}$, de la définition du potentiel d'Airy (3.36) et de la seconde équation de (3.53)). Ainsi $f_1(y) = -c_0 y + c_1$ et $f_2(x) = c_0 x + c_2$. Ceci correspond à des mouvements de corps rigide que nous annulons.

Ainsi on écrit le vecteur déplacement sous la forme :

$$2\mu(u_x + iu_y) = -2\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \phi(z) \quad (3.63)$$

Il convient d'identifier le terme $\partial U / \partial \bar{z}$, pour cela nous devons dériver par rapport à \bar{z} l'équation (3.59). Nous tenons compte du théorème suivant :

Théorème 9 Si $f(z)$ est une fonction holomorphe, alors il existe une fonction anti-holomorphe $g(\bar{z})$ (même définition qu'une fonction holomorphe mais en intervertissant z et \bar{z}) telle que $g(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Par la suite on ne distingue plus f et g et on écrira directement par abus de notation :

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

Ainsi nous avons :

$$2\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \phi(z) + \overline{\xi'(z)} + z\overline{\phi'(z)} \quad (3.64)$$

On pose la fonction holomorphe $\psi(z)$ suivante :

$$\psi(z) = \xi'(z) \quad (3.65)$$

Donc :

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\phi(z) - \overline{\psi(z)} - z\overline{\phi'(z)} \quad (3.66)$$

Où :

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{Déformations planes} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{Contraintes planes} \end{cases} \quad (3.67)$$

Par ailleurs la définition du potentiel d'Airy (3.36) nous donne directement la trace et le déviateur des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= \Delta U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

En reprenant l'expression (3.59) nous obtenons :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2(\phi'(z) + \phi'(\bar{z})) \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2(\psi'(z) + \bar{z}\phi''(z)) \end{cases} \quad (3.69)$$

Nous exprimons également le résultat final pour un domaine élastique simplement connexe en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2 \left(\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta} \left(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) \right) \\ 2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} (\kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}) \end{cases} \quad (3.70)$$

Ainsi trouver la solution d'un problème d'élasticité plane isotrope revient à identifier deux potentiels holomorphes sur le domaine élastique considéré, qui vérifient les conditions aux limites. Cette approche est particulièrement puissante, car les fonctions holomorphes ont de très bonnes propriétés de régularité, ainsi nous avons :

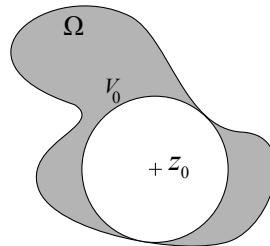
Théorème 10 Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un ouvert Ω , alors $f(z)$ est dérivable sur Ω , au sens de la limite du taux d'accroissement :

$$f'(z_0) = \lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Les règles de dérivation restent inchangées par rapport au cas réel. Par ailleurs la dérivabilité au sens complexe est beaucoup plus forte qu'au sens réel, elle implique notamment que la fonction est infiniment dérivable sur l'ouvert Ω , et qu'elle est analytique en tout point de Ω , c'est-à-dire que quelque soit z_0 dans Ω il existe un voisinage V_0 de z_0 contenu dans Ω tel que :

$$\forall z \in V_0, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Ceci est illustré dans la Figure suivante :



Développable en série entière autour de z_0

De plus à l'infini toute fonction holomorphe admet un développement asymptotique en série de Laurent (en z^n et $(1/z^n)$)

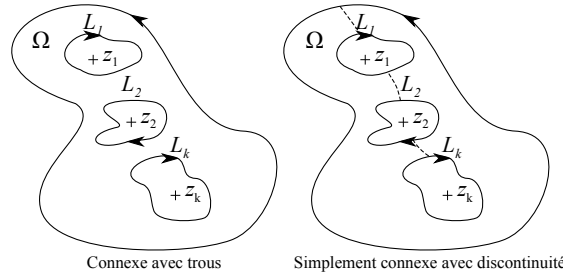
Il existe une manière particulièrement élégante de vérifier les conditions aux limites qu'elles soient en déplacement ou en vecteur contrainte, bien que celle-ci ne soit pas exposée dans ces pages, en effet cela serait fastidieux d'autant plus qu'une alternative beaucoup plus simple (développement en série entière) dans le cas d'un cylindre est utilisée à la place. Néanmoins nous citons le principe (exposé en détail par Lu (1995)), il s'agit d'écrire les potentiels holomorphes sous formes d'intégrales à noyau singulier du type de Cauchy, soit :

$$\begin{cases} \phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\omega(t)}{t-z} dt \\ \psi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\bar{\omega}(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\bar{t}\omega'(t)}{t-z} dt \end{cases} \quad (3.71)$$

La résolution d'équations intégrales singulières développées par Muskhelishvili (1953) et Vekua (1964) est utilisée comme un puissant outil pour la recherche de solutions analytiques.

3.6.2. Dans un domaine élastique connexe

Nous considérons à présent le cas d'un domaine élastique connexe, mais non-simplement connexe, c'est-à-dire qu'il a des trous. Nous ne développons pas les équations dans ce cas, l'idée principale est de couper le domaine de sorte qu'il n'ait plus de trous, pour justifier l'existence du potentiel d'Airy (car le lemme de Poincaré nécessite cette condition), comme le montre la Figure suivante :



Par ailleurs le théorème de primitive fait intervenir des logarithmes :

Théorème 11 Si Ω un ouvert connexe (non simplement connexe avec k "trous" d'origine z_j avec $j \in \{1; \dots; k\}$) et si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur Ω , alors il existe une fonction holomorphe $F(z)$ sur Ω et il existe $\gamma_j \in \mathbb{C}$ avec $j \in \{1, \dots, k\}$ tels que :

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) + \sum_{j=1}^k \gamma_j \ln(z - z_j)$$

De cette manière on démontre (cf Lu (1995)) que le résultat portant sur les contraintes n'est pas modifié, mais qu'il faut considérer des logarithmes complexes pour les déplacements, qui ne dépendent que de la résultante des efforts appliqués au bord de chaque trou. Il est à noter que les logarithmes complexes sont des fonctions multi-valuées (et donc non-holomorphes). Cela est cohérent avec le fait qu'en analyse réelle, la présence de trous autorise des solutions bi-harmoniques faisant intervenir des logarithmes.

CHAPITRE IV

ÉVALUATION DES CONTRAINTES DE CONTACT

Ce chapitre est une adaptation d'un article publié dans Journal of Materials Processing Technology (Weisz-Patrault et al. (2011)). Il s'agit de la première application industrielle des méthodes présentées aux chapitres 2 et 3. La connaissance des contraintes de contact entre le cylindre de travail et la tôle devient critique pour le laminage moderne à grande vitesse. Dans ce chapitre, une méthode inverse analytique est développée pour déterminer les efforts de contact dans l'emprise en mesurant le tenseur des contraintes, grâce à des fibres optiques, en un point à l'intérieur du cylindre. Contrairement à de nombreuses méthodes inverses, aucune inversion de matrice n'est nécessaire, car l'angle de contact étant extrêmement réduit nous serions conduits à des matrices mal conditionnées. Les méthodes itératives ne sont pas non plus étudiées parce que des temps de calculs très faibles sont recherchés. Cette approche utilise la théorie de l'élasticité isotrope développée dans le chapitre 3, sous l'hypothèse que le problème est isotherme et plan. La solution repose sur des développements en séries entières de fonctions holomorphes. D'autre part, les temps de calcul sont étudiés pour optimiser rapidement les paramètres industriels pendant le procédé de laminage, dans l'idée d'une future boucle d'asservissement. Des simulations de laminage à chaud, à froid et de skinpass (finitions) sont empruntées à la littérature pour démontrer la précision de la présente méthode et la faisabilité de ce nouveau type de capteurs inverses, en prenant en compte les contraintes technologiques du système de mesure par fibres optiques (par exemple la fréquence d'acquisition ou la profondeur limite d'insertion du capteur).

4.1. Introduction

4.1.1. Principes

Le laminage moderne combine des vitesses de rotation plus élevées, des taux de réduction de l'épaisseur du produit plus importants, des nuances d'acier plus dures et de tôles plus fines (pouvant aller à quelques centaines de microns). Ainsi, pour assurer la qualité du produit, particulièrement en termes de constance de l'épaisseur, de bonne planéité et d'absence de défauts de surface, la connaissance des frottements et de la lubrification dans l'emprise devient essentielle. Le contact entre la bande et le cylindre de travail est le lieu de cisaillements, de pressions normales et de conditions de lubrification inconnus. Quelques modèles, qui caractérisent l'interface, en prenant en compte la lubrification ont été proposés ces dernières années par Montmitonnet et al. (2007) mais nécessitent encore une validation expérimentale. D'autre part, très peu d'informations contrôlant la qualité du produit sont accessibles pendant le procédé, ainsi la connaissance des efforts de contact en temps réel serait une avancée technologique majeure permettant l'optimisation des paramètres de laminage (tels que la force de laminage, la lubrification, le taux de refroidissement ou encore la vitesse) via une boucle d'asservissement.

Des capteurs offrent déjà la possibilité de mesurer les contraintes dans l'emprise. Un grand nombre de chercheurs, comme par exemple Jeswiet and Rice (1982) ou plus récemment Liu et al. (2002) et Andersen et al. (2001), ont utilisé des capteurs à aiguille (directement implantées dans le contact). Cependant comme nous l'avons précisé en introduction, la présence de l'aiguille perturbe localement le contact, les écoulements respectifs du métal et du lubrifiant sont modifiés. Par ailleurs des marques importantes sont visibles sur le produit (dues au frottement de l'aiguille), une utilisation industrielle est donc impossible. Plus récemment, Lagergren et al. (2006) a développé un capteur beaucoup plus large que la longueur de l'emprise. Si ce capteur peut permettre de dépasser la difficulté de la perturbation des conditions de frottement, le problème des marques sur le produit n'est pas résolu.

Ainsi une méthode inverse est nécessaire. Stelson (1983) a montré que la déformation élastique du cylindre permet d'évaluer les efforts de contact dans l'emprise (la mesure est faite sous la surface du cylindre). Parmi quelques contributions numériques nous pouvons mentionner la méthode itérative par éléments finis développée par Schnur and Zabarar (1990). Le travail est adaptable sur toute forme plane avec des capteurs insérés sous la surface. Une application au laminage à chaud avec des conditions très favorables montre un faible niveau de précision. Une méthode itérative alternative, par éléments de frontières a été proposée par Bezerra and Saigal (1995). Les mêmes conditions de laminage sont analysées avec une meilleure précision, cependant les temps de calcul restent longs. Le développement de ce nouveau type de capteur vise à une exploitation en temps réel. Donc, les schémas itératifs sont écartés. De plus, une approche aux éléments finis, ou tout autre approche fondée sur l'inversion d'une grande matrice représentant la relation linéaire entre les déformations mesurées et les contraintes de contact, serait imprécise, voire impossible. En effet, l'emprise a une longueur très réduite et les matrices seraient alors mal conditionnées car les angles impliqués seraient trop proches les uns des autres. Par conséquent, le problème classique, où de petites erreurs de mesures conduisent à de très importantes variations de la solution, invalide complètement cette possibilité. Pour éviter ce problème, Meierhofer and Stelson (1987) ont proposé une méthode analytique fondée sur l'hypothèse que pendant un tour les conditions dans l'emprise ne changent pas (régime permanent tour par tour). Il est donc possible de mesurer le tenseur des déformations (converties en contraintes par la loi de comportement isotrope) en un point dans le cylindre et d'obtenir tout un cercle de mesures grâce à la rotation du cylindre. De ce fait nous pouvons envisager de résoudre le problème dans le sous-domaine constitué du disque de rayon R_m (rayon de mesure) et d'étendre la solution par continuité vers la surface et en particulier dans l'emprise, comme nous l'avons déjà indiqué en introduction. Cependant, le travail de Meierhofer and Stelson (1987) repose d'une part sur une formulation élastique assez lourde du potentiel d'Airy en séries de fonctions bi-harmoniques réelles (cf. chapitre 2) adaptée pour les problèmes de couronnes, et d'autre part sur un développement en série de Fourier des contraintes mesurées. Enfin l'identification des coefficients des deux séries est nécessaire. Cependant pour obtenir suffisamment d'équations les auteurs ont utilisé des mesures à deux positions radiales différentes, définissant ainsi deux cercles concentriques de mesure. D'un point de vue technologique l'insertion d'un capteur mesurant les contraintes à deux positions radiales différentes est beaucoup plus difficile à concevoir qu'un capteur simple. De plus, beaucoup d'inversions de matrices d'identification (bien conditionnées si les deux rayons de mesures sont suffisamment distincts) sont requises.

Très récemment, Legrand et al. (2010) a implémenté numériquement cette méthode et a évalué son efficacité sur différentes simulations de laminage. Les auteurs conclurent que, pour des conditions industrielles normales, la méthode développée par Meierhofer and Stelson (1987) est relativement précise mais difficilement utilisable en raison des temps de calculs très importants.

4.1.2. Fibres optiques

Dans ce chapitre, une approche analytique similaire à l'idée générale de Meierhofer and Stelson (1987) est construite. Le tenseur de déformation (donc de contraintes) est mesuré en un seul point du cylindre (une seule position radiale, au lieu de deux). Cette différence est l'une des principales améliorations apportées par cette contribution, car l'aspect technologique s'en trouve grandement simplifié. Les mesures sur tout le cercle sont obtenues grâce à la rotation du cylindre de travail. Concernant le capteur local de déformation lui-même, Meierhofer and Stelson (1987) ont utilisé des jauges de déformation collées sur l'extrémité plate d'un petit cylindre de laboratoire. Cependant, cette technique n'est pas recommandée pour les cylindres industriels parce qu'ils sont beaucoup plus larges que le produit, ainsi nous ne mesurerions aucun signal, du fait qu'à son extrémité le cylindre n'est pas en contact avec la bande. Des fibres optiques sont considérées dans cette étude. La mesure repose sur le principe des réseaux de Bragg, qui donnent les déformations locales en interprétant les longueurs d'onde réfléchies comme cela est rappelé par Ferdinand et al. (2009). Les fibres optiques insérées dans un trou très fin font l'objet d'une étude technologique dans le cadre du projet européen RFS-PR-08051. Après l'insertion du capteur, la surface du cylindre est rectifiée (ou polie de nouveau) pour éviter toute marque sur le produit.

4.1.3. Approche mathématique

Le problème sur le sous domaine défini par le cercle de mesure est résolu analytiquement. Puis, la solution est étendue par continuité vers la surface pour exhiber les contraintes de contact dans l'emprise. Pour cela, nous devons utiliser les équations de l'élasticité plane pour un matériau isotrope sous condition isotherme, développées

par Muskhelishvili (1977) et exposées en détail au chapitre 3. Le formalisme complexe permet un développement très simple des fonctions holomorphes à déterminer en séries entières. Par ailleurs, une technique pour rendre le calcul aussi rapide que possible est exposée. Ainsi, le temps de calcul a été considérablement réduit pour atteindre une utilisation en temps réel de ce nouveau type de capteurs inverses.

Dans ce chapitre tous les résultats sont dérivés de simulations. Les conditions industrielles données par Legrand et al. (2010) sont reprises : laminage à chaud, à froid et conditions de skinpass (laminage à froid de finition sur épaisseurs très faibles). Ainsi, les mesures au rayon interne sont simulées par un calcul direct (cette étape remplace de réelles mesures qui doivent être faites par fibres optiques) et les contraintes de contact sont déduites de la méthode inverse. Une comparaison entre les contraintes prescrites en surface et l'estimation des contraintes reconstruites par méthode inverse permet d'évaluer la qualité de la méthode. Il apparaît que la présente solution inverse est beaucoup plus précise que celle développée par Meierhofer and Stelson (1987). En outre, Legrand et al. (2010) conclue que le cas extrême du skinpass ne peut pas être reconstruit du fait de la longueur de contact trop restreinte et des gradients de contraintes trop élevés. En revanche la méthode exposée dans ce chapitre est satisfaisante même pour de telles conditions.

Toutes les notations sont listées dans le tableau 4.1.

TABLE 4.1 – Nomenclature

R_s	Rayon externe du cylindre	ϵ	Erreur de reconstruction	$\sigma_{(.)}$	Contraintes
R_m	Rayon de mesure des contraintes	∇_{max}	Gradient max du signal d'entrée	$\sigma_{(.)}^m$	Contraintes mesurées
r	Position radiale	I_{max}	Max de la norme du signal d'entrée	$\sigma_{(.)}^p$	Contraintes prescrites
θ	Position angulaire	δ	Angle de l'emprise	a_k	Coefficients à calculer
N_s	Nombre de points d'interpolation	z	Variable complexe	b_k	Coefficients à calculer
N_m	Nombre de points de mesure	Φ	Potentiel holomorphe	M_1	Matrice
N_t	Nombre de troncature	Ψ	Potentiel holomorphe	M_2	Matrice
N_{inv}	Nombre d'inversions de matrices	$(..)$	$rr, r\theta$ ou $\theta\theta$	M_3	Matrice

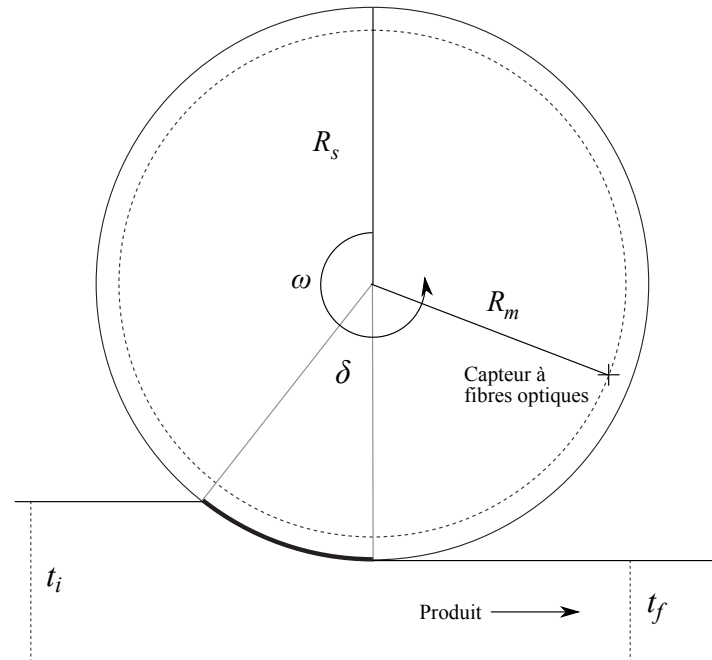


FIGURE 4.1 – Mesure des contraintes

4.2. Analyse inverse

Le rayon, où sont mesurées les contraintes, est R_m (m signifiant mesure) et le rayon du cylindre est $R_s > R_m$ (s signifiant surface). Les contraintes mesurées sont notées σ_{rr}^m , $\sigma_{r\theta}^m$ et $\sigma_{\theta\theta}^m$. Quelque soit $z \in \mathbb{C}$, nous rappelons les équations de l'élasticité isotrope et isotherme donnés par Muskhelishvili (1977) :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2 \left(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right) \\ -\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta} (\Psi(z) + \bar{z}\Phi'(z)) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ sont des fonctions holomorphes inconnues définies sur tout le disque de rayon R_s . Nous avons précisé au chapitre 3, que mathématiquement ces fonctions sont analytiques donc développables en séries entières sur un disque. Ainsi quelque soit $z \in \mathcal{D}(R_s)$ (le disque de rayon R_s) :

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a'_k z^k \quad \left| \quad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b'_k z^k \quad (4.2)$$

Pour manipuler des coefficients sans dimension nous introduisons les quantités suivantes :

$$a_k = R_m^k a'_k \quad \left| \quad b_k = R_m^k b'_k \quad (4.3)$$

En combinant (4.1), (4.2) et (4.3), les contraintes peuvent s'écrire en fonction de a_k et b_k :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{R_m} \right)^k (a_k e^{ik\theta} + \overline{a_k} e^{-ik\theta}) \\ -\sigma_{rr}(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) + 2i\sigma_{r\theta}(r, \theta) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{R_m} \right)^k (b_k e^{i(k+2)\theta} + k a_k e^{ik\theta}) \end{cases} \quad (4.4)$$

Il suffit de déterminer a_k et b_k pour résoudre complètement le problème. En effet, en combinant les équations (4.4) évaluée en $r = R_s$, les contraintes de surface sont obtenues.

Pa ailleurs, les familles a_k et b_k sont calculées en intégrant les contraintes mesurées au rayon interne par les formules suivantes (le second système s'obtient en soustrayant les deux équations de (4.4)) :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m) d\theta \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ a_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m}{e^{ik\theta}} d\theta \\ \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m + 2i\sigma_{r\theta}^m}{e^{i(k+2)\theta}} d\theta - (k+2)a_{k+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}^m d\theta \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_{rr}^m + i\sigma_{r\theta}^m}{e^{ik\theta}} d\theta \\ \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(2+k)\sigma_{rr}^m + ik\sigma_{r\theta}^m}{e^{i(k+2)\theta}} d\theta \end{cases} \quad (4.5)$$

Le second système correspondant à l'écriture du vecteur contrainte et peut paraître plus intéressant car il ne fait pas intervenir la composante $\theta\theta$ du tenseur des contraintes. Mais en tous les cas, pour mesurer les composantes rr et $r\theta$, trois directions de fibres sont à considérer (chaque fibre mesure une déformation axiale). Les formulations sont rigoureusement équivalentes et donnent les mêmes résultats.

4.3. Précision et temps de calcul

La point central de toute la méthode est la qualité atteinte pour le calcul des intégrales (4.5). Une petite erreur numérique sur a_k ou b_k est multipliée au moins par $(R_s/R_m)^k$, qui augmente jusqu'à ce que la solution diverge. Nous comprenons cela comme la manifestation du fait que le problème est mal posé. Pour éviter de tels

écueils, nous devons tronquer les sommes. Ainsi, plus les intégrales seront calculées avec précision et plus le développement en série pourra être poursuivi à des indices élevés, et plus la solution sera précise.

Pour calculer les intégrales, beaucoup de points de mesures sont nécessaires. Cependant la fréquence d'acquisition du système à fibres optiques est encore assez faible (de l'ordre de quelques kHz) du fait du temps d'interprétation des longueurs d'ondes qui sont consultées les unes après les autres, d'où, un nombre de points assez limité. Une manière efficace de calculer pratiquement les intégrales (4.5) (temps de calcul très courts et bonne précision) est d'interpoler le signal d'entrée avec des fonctions cubiques (spline). Le nombre de points d'interpolation est noté N_s (où s signifie spline). Le choix de N_s est un compromis entre la précision et le temps de calcul. L'interpolation en spline améliore considérablement la qualité du signal entrant. Les intégrations (4.5) sont comme des coefficients de Fourier, et une manière classique et très efficace de calculer ce genre d'intégrale est d'utiliser les transformées de Fourier rapides (fft, fast fourier transform), qui calculent la somme de Riemann de 1 à N_s (qui converge lorsque N_s devient grand) vers la valeur de l'intégrale. Cette technique a été mentionnée au chapitre 2.

Plus précisément, si σ est le signal d'entrée représenté comme un vecteur colonne de taille N_s , la fft calcule le vecteur également de taille N_s suivant ($1 \leq k \leq N_s$) :

$$\frac{1}{N_s} \text{fft}(\sigma)_k = \frac{1}{N_s} \left(\sum_{m=1}^{N_s} \sigma(m) e^{-2i\pi \frac{(m-1)(k-1)}{N_s}} \right) \xrightarrow{N_s \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) e^{-i(k-1)\theta} d\theta \right) \quad (4.6)$$

Donc, l'extraction des coefficients a_k et b_k peut être effectuées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \simeq \frac{1}{4N_s} \text{fft}(\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m)_1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ a_k \simeq \frac{1}{2N_s} \text{fft}(\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m)_{k+1} \\ \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k \simeq \frac{1}{2N_s} \text{fft}(-\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m + 2i\sigma_{r\theta}^m)_{k+3} \\ \quad - (k+2)a_{k+2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 \simeq \frac{1}{2N_s} \text{fft}(\sigma_{rr}^m)_1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ a_k \simeq \frac{1}{N_s} [\text{fft}(\sigma_{rr}^m)_{k+1} + i \text{fft}(\sigma_{r\theta}^m)_{k+1}] \\ \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k \simeq -\frac{1}{N_s} [(2+k) \text{fft}(\sigma_{rr}^m)_{k+3} + i k \text{fft}(\sigma_{r\theta}^m)_{k+3}] \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Le nombre d'intégrales à calculer est identique pour les deux formulations, dans le premier cas nous calculons deux fft portant sur la trace et le déviateur des contraintes, dans le second nous calculons deux fft portant directement sur les pressions normales et les cisaillements.

Le tableau 4.2 liste les temps correspondant aux calculs des N_s coefficients a_k et b_k (et incluant l'interpolation du signal d'entrée) pour différentes valeurs de N_s . Il s'agit en fait de temps strictement proportionnels à N_s . Tous les temps de calcul sont obtenus pour un quadcore 2.8 GHz et sont les temps affichés par Scilab 5.3. De plus, un programme écrit dans un langage compilé peut réduire les temps de calcul. Dans la suite, le paramètre N_s est fixé à 100 000. Ce choix est un compromis, que nous discutons à la section 4.6.

TABLE 4.2 – Temps de calcul

N_s	Temps de calcul (s)
20 000	0.01
60 000	0.03
100 000	0.06
200 000	0.12

La formule (4.4), évaluée en R_s , est une déconvolution et peut être calculée par une transformée de Fourier inverse (inverse fast Fourier transform). Cependant, la fonction ifft n'offre pas le choix des points de reconstruction. Parce que cette reconstruction à la surface n'est voulue que dans l'emprise, la déconvolution est calculée comme suit. La formule (4.4) est écrite sous forme matricielle. Donc, si la reconstruction est faite pour N_r (r signifiant

reconstruction) points situés dans l'emprise et notés θ_j ($j \in \llbracket 1, N_r \rrbracket$) et si le nombre de termes conservés dans la somme est noté N_t (t signifiant troncature), alors on a (en notant en gras les vecteurs issus des quantités indicées du même nom, tous les vecteurs sont définis sur l'exemple $\mathbf{a} = a_k$ pour ($k \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$)) :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(R_s, \boldsymbol{\theta}) + \sigma_{\theta\theta}(R_s, \boldsymbol{\theta}) = M_1 \cdot \mathbf{a} + \overline{M_1} \cdot \overline{\mathbf{a}} \\ \sigma_{rr}(R_s, \boldsymbol{\theta}) + \sigma_{\theta\theta}(R_s, \boldsymbol{\theta}) + 2i\sigma_{r\theta}(R_s, \boldsymbol{\theta}) = M_2 \cdot \mathbf{b} + M_3 \cdot \mathbf{a} \end{cases} \quad (4.8)$$

où $(j, k) \in \llbracket 1, N_r \rrbracket \times \llbracket 1, N_t \rrbracket$:

$$\begin{cases} M_{1,j,k} = 2 \left(\left(\frac{R_s}{R_m} \right)^k \exp(ik\theta_j) \right) \\ M_{2,j,k} = 2 \left(\left(\frac{R_s}{R_m} \right)^k \exp(i(k+2)\theta_j) \right) \\ M_{3,j,k} = 2 \left(\left(\frac{R_s}{R_m} \right)^k k \exp(ik\theta_j) \right) \end{cases} \quad (4.9)$$

Le tableau 4.2 donne les temps de calcul pour \mathbf{a} et \mathbf{b} . Un aspect très intéressant en écrivant (4.4) sous forme matricielle est que les matrices M_1 , M_2 et M_3 peuvent être évaluées avant le procédé et stockées dans une bibliothèque numérique. Le calcul purement on-line est donc limité aux produits de matrices impliqués dans (4.8) et surtout au calcul des fft des signaux entrants. Cette bibliothèque peut contenir différentes versions des matrices, correspondant à différentes valeurs de N_r et N_t . Le temps de calcul des produits dans (4.8) pour $N_r = 55$, ce qui paraît suffisant pour l'interprétation industrielle, est négligeable (0.002 s) devant le temps des fft.

4.4. Erreur de reconstruction

Pour valider la solution, nous considérons des simulations du procédé de laminage, que nous détaillerons par la suite. Ces simulations fournissent les contraintes de contact que nous prescrivons à la surface du cylindre, notées $\sigma_{(\cdot)}^p(\theta)$ (où p signifie prescrites et où (\cdot) désigne rr ou $r\theta$). Un simple calcul élastique donne les contraintes au rayon R_m (notées $\sigma_{(\cdot)}^m$), qui constituent les données d'entrée de la méthode inverse. En exploitant ces dernières, nous reconstruisons les contraintes de contact dans l'emprise, notées $\sigma_{(\cdot)}(R_s, \theta)$. Pour évaluer la qualité de la reconstruction, une erreur quantifiée est introduite. Nous utilisons la distance relative (en norme 2) entre les contraintes reconstruites issues du calcul inverse et les contraintes prescrites en surface :

$$\epsilon_{(\cdot)} = 100 \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi} [\sigma_{(\cdot)}(R_s\theta) - \sigma_{(\cdot)}^p(\theta)]^2 d\theta}{\int_0^{2\pi} [\sigma_{(\cdot)}^p(\theta)]^2 d\theta}} \quad (4.10)$$

4.5. Critère de troncature

L'efficacité de la méthode repose sur les intégrations (4.5). Comme nous l'avons précisé, une petite erreur (inévitable) est multipliée au moins par $(R_s/R_m)^k$, qui augmente de plus en plus jusqu'à ce que la solution diverge. Par conséquent le choix du nombre de troncature des sommes est essentiel. Nous rappelons que le nombre de troncature est noté N_t . Nous proposons ici, une technique empirique pour obtenir un bon choix a priori de N_t simplement en analysant quelques paramètres du signal entrant. Cette technique n'est qu'une première tentative pour automatiser le choix de N_t . Cependant des études ultérieures beaucoup plus axées sur l'erreur de quadrature devraient être mises en oeuvre. Nous pouvons également envisager une analyse en fréquence et l'écriture d'un script qui balaye les coefficients du type $a_k(R_s/R_m)^k$ et tronque automatiquement lorsque ceux-ci commencent à diverger, cette dernière approche semble la plus prometteuse quoiqu'elle n'a pas été automatisée (le graphe est affiché et le critère de troncature saisi à la main par l'utilisateur). Dans les chapitres suivants, la même problématique revient systématiquement. Le travail que nous entreprenons dans ce chapitre n'a pas été repris pour ne

pas alourdir les travaux avec des considérations trop axées sur le traitement du signal. L'accent est porté sur les considérations de modélisation.

Les signaux d'entrée sont donnés avec une résolution N_m , qui représente le nombre de points de mesure sur une rotation du cylindre (m signifiant mesure). La qualité de l'extraction des coefficients a_k et b_k dépend fortement de N_m et de la singularité du signal. Le maximum de la dérivée du signal (noté ∇_{max}), le maximum de la norme du signal (noté I_{max}) et la base angulaire de l'emprise (notée δ) sont considérés pour caractériser la singularité du signal. Comme nous cherchons une loi empirique, une relation logarithmique peut être raisonnablement tentée :

$$N_t = \mathcal{A} \times N_m^\alpha I_{max}^\beta \nabla_{max}^\gamma \delta^\lambda \quad (4.11)$$

où α , β , γ et λ sont des coefficients sans dimension. En outre, $\nabla_{max}^\beta I_{max}^\gamma \delta^\lambda$ doit être sans dimension, donc $\beta = -\gamma = -\lambda$. Ainsi, le modèle devient (où : $\mathcal{S} = I_{max} / (\nabla_{max} \delta)$) :

$$N_t = \mathcal{A} \times N_m^\alpha \mathcal{S}^\beta \quad (4.12)$$

Nous répétons que ce modèle n'est qu'une loi empirique. Cependant, pour la discussion technique cette approche est dans un premier temps suffisante. Nous cherchons à déterminer \mathcal{A} , α et β , de sorte que le nombre de troncature optimal soit proche du nombre de troncature prévu par la loi (4.12). Pour cela trois conditions industrielles reprises de Legrand et al. (2010) sont testées. Le laminage à chaud, à froid et skinpass couvrent très largement le champ des conditions possibles en laminage et les signaux utilisés semblent donc représentatifs des extrêmes que l'on peut atteindre pour ce type de problèmes et peuvent donc être utilisés comme références. Les profils de contraintes dans l'emprise sont imposés et un calcul élastique direct conventionnel permet d'obtenir les profils de contraintes au rayon R_m (cette partie remplace les mesures qui doivent être faites par fibres optiques). Ces profils de contraintes sont ensuite utilisés comme signaux d'entrée pour la méthode inverse. En utilisant (4.10), il est possible pour chaque condition de laminage et pour chaque valeur de N_m de produire le graphe (en fonction de N_t) des erreurs entre les contraintes reconstruites par méthode inverse et les contraintes initialement prescrites en surface.

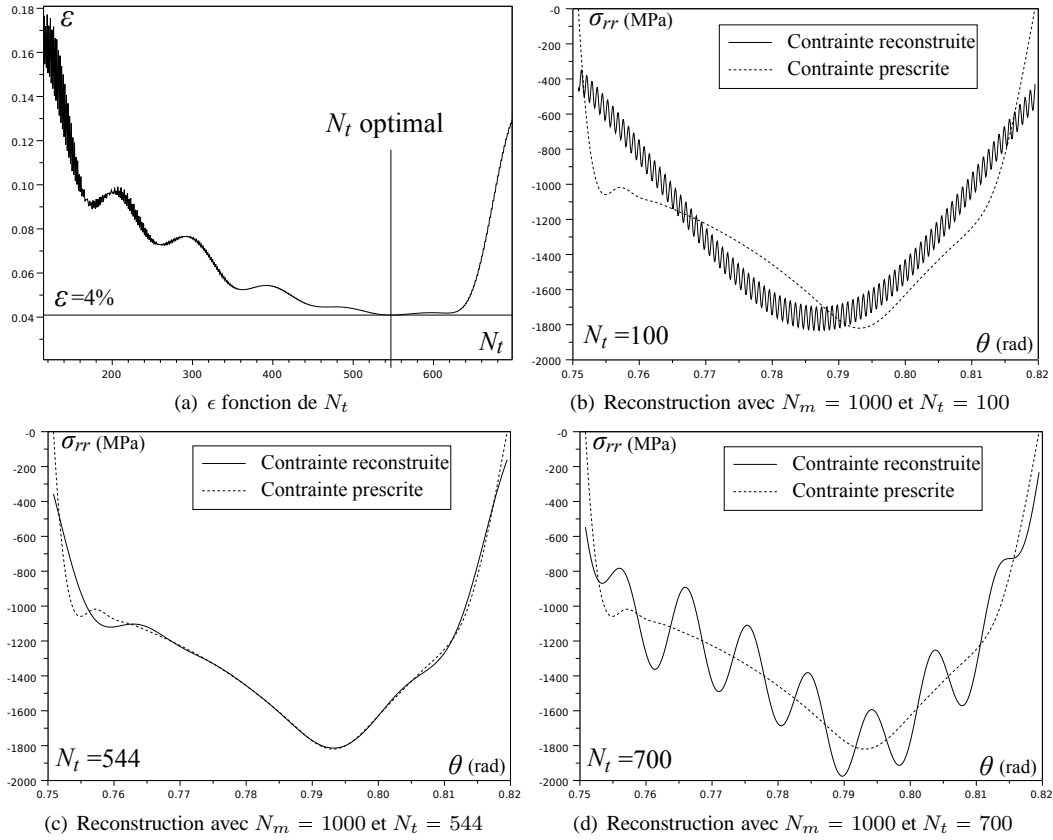


FIGURE 4.2 – N_t optimal et différentes reconstructions en laminage à froid

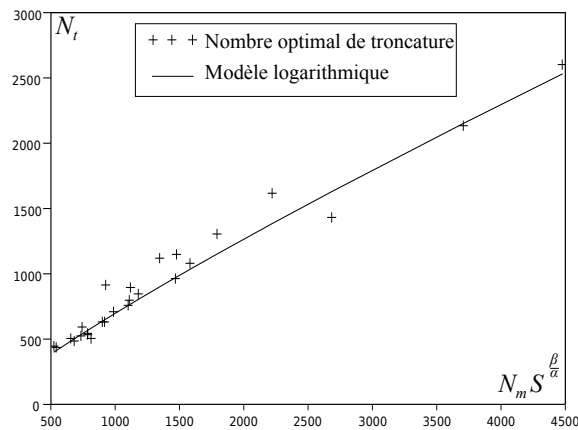
Par exemple, la figure 4.2(a) (correspondant à la pression normale du cas de laminage à froid avec $N_m = 1000$) montre que l'erreur atteint un minimum global pour une certaine valeur de N_t . Il est clair que la meilleure reconstruction est un compromis entre la convergence de la série et l'amplification des erreurs dans le calcul des intégrales. Les reconstructions correspondant à trois valeurs différentes de N_t sont présentées figures 4.2(b), 4.2(c) et 4.2(d). La figure 4.2(b) est une mauvaise reconstruction due au fait que la série n'a pas encore convergé, la figure 4.2(c) est la meilleure reconstruction et la figure 4.2(d) présente une mauvaise reconstruction due au fait que trop de termes ont été conservés dans la somme. La valeur de N_t qui correspond à la meilleure reconstruction est listée dans les tableaux 4.3(a) et 4.3(b) pour différentes valeurs de N_m et pour les trois cas de laminages considérés (c'est-à-dire pour trois valeurs différentes du critère de singularité S).

TABLE 4.3 – N_t optimal

(a) Pressions normales, σ_{rr}				(b) Cisaillements, $\sigma_{r\theta}$			
N_m -	Chaud $S \simeq 0.07$	Froid $S \simeq 0.39$	Skinpass $S \simeq 0.64$	N_m -	Chaud $S \simeq 0.087$	Froid $S \simeq 0.29$	Skinpass $S \simeq 0.3$
1000	445	544	630	1000	437	527	590
1250	503	708	899	1250	489	630	919
1500	532	846	1119	1500	506	761	795
2000	532	1080	1304	2000	506	960	1150
3000	532	1080	1428	3000	506	960	1620
5000	532	1080	2600	5000	506	960	2364

Dans les tableaux 4.3(a) et 4.3(b), le nombre optimal de troncature N_t atteint une limite quand N_m augmente. Du fait de l'interpolation en splines cubiques (avec un très grand nombre de points d'interpolation) et de la régularité des signaux entrants, la précision des intégrations ne peut pas être améliorée au-delà d'une certaine limite, qui dépend de la longueur de l'emprise. Pour identifier les constantes \mathcal{A} , α et β apparaissant dans le modèle (4.12), seules les valeurs de N_t avant la saturation sont prises en compte (valeurs en caractères gras dans les tableaux 4.3(a) et 4.3(b)). La validité de cette loi est donc limitée aux valeurs de N_m pour lesquelles la précision n'est pas saturée.

La figure 4.3, représente en fonction de $N_m S^{\frac{\beta}{\alpha}}$, les nombres optimaux de troncature N_t repris des tableaux 4.3(a) et 4.3(b). Le modèle (4.12) est également représenté avec les valeurs suivantes : $\mathcal{A} = 1.83$, $\alpha = 0.86$, $\beta = 0.215$, qui seront conservées par la suite.

FIGURE 4.3 – N_t vs. $N_m S^{\frac{\beta}{\alpha}}$

Le temps de calcul du modèle logarithmique (4.12) est négligeable (0.006 s) devant celui des fft des signaux entrants.

4.6. Discussion sur le nombre de points d'interpolation

Dans cette section, le choix du nombre de points d'interpolation $N_s = 100000$ est commenté. Comme nous l'avons expliqué dans la section 4.3, ce choix est un compromis entre la précision et le temps de calcul. En utilisant l'erreur définie par (4.10) et les trois conditions de laminage reprises de Legrand et al. (2010), les contraintes pour différentes valeurs de N_s (c'est-à-dire différentes qualités d'intégration) sont reconstruites. Il est possible de produire le graphe des erreurs entre les contraintes reconstruites et les contraintes prescrites, en fonction du nombre de points d'interpolation N_s pour chaque condition de laminage. La figure 4.4(a) (resp 4.4(b)) présente l'erreur en fonction de N_s pour la reconstruction des pressions normales (resp cisaillements). Les valeurs de N_m sont celles considérées dans les sections suivantes. Pour le cas Skinpass, l'erreur diminue exponentiellement en fonction N_s . Le meilleur compromis est donc $N_s = 100000$. Par simplicité, ce choix est appliqué à toutes les conditions de laminage, quoique pour le laminage à chaud et à froid on aurait pu se contenter de $N_s = 20000$.

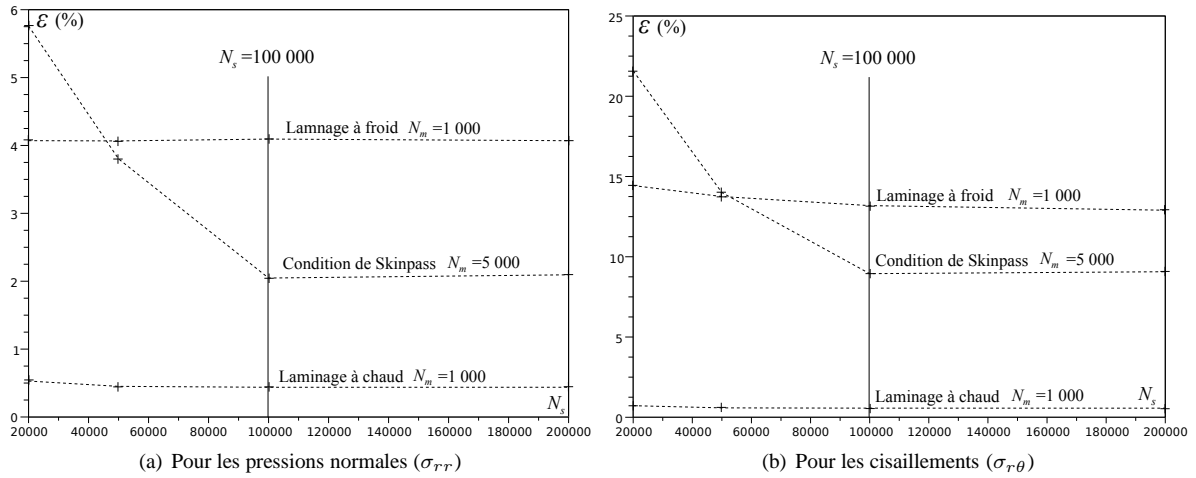


FIGURE 4.4 – ϵ vs. N_s

4.7. Validation et comparaison

4.7.1. Contraintes prescrites dans l'emprise

Les trois simulations que nous avons déjà évoquées à plusieurs reprises, notamment dans les sections 4.5 et 4.6 sont utilisées pour valider l'efficacité de la méthode inverse développée dans ce chapitre et pour faire une comparaison quantitative avec les résultats obtenus par Legrand et al. (2010). Les contraintes de contact des trois conditions de laminage sont données par un modèle numérique LAM3 initialement établi par Hacquin (1996). Il s'agit d'un modèle couplé considérant la tôle sous régime thermo-visco-plastique et le cylindre sous régime thermoélastique. Les profils de contraintes pour les pressions normales (σ_{rr}) et les contraintes de cisaillement ($\sigma_{r\theta}$) sont présentés figures 4.5(a), 4.6(a) et 4.7(a). Les conditions de laminage à chaud sont les plus régulières, alors que les conditions de Skinpass sont les plus singulières. La longueur d'emprise varie de 71.6 mm pour le laminage à chaud, à 13.7 mm pour le laminage à froid et 4.8 mm pour les conditions de Skinpass. Il est intéressant de constater que la forme des contraintes données par le modèle LAM3 (Hacquin (1996)) est de même nature que les efforts de contact trouvés par Boussinesq (1885) pour des forces concentrées sur un plan semi-infini avec le classique changement de signe des cisaillements.

Les paramètres de simulation pour les conditions à chaud (resp à froid et Skinpass) sont listés dans les tableaux 4.4 (resp 4.5 et 4.6).

4.7.2. Mesures simulées

Un calcul élastique direct classique donne les contraintes dans le cylindre au rayon R_m (considérées comme des simulations des mesures qui doivent être faites par fibres optiques). Les figures 4.5(b), 4.6(b) et 4.7(b), pré-

sentent les contraintes calculées au rayon R_m , sans bruit ajouté.

Le rayon interne R_m est choisi à 3 mm de la surface pour les conditions de laminage à chaud et à froid sur la base des études technologiques sur l'insertion des fibres, et pour pouvoir comparer aux résultats de Legrand et al. (2010). Cependant pour le cas difficile du Skinpass, les gradients de contraintes sont très élevés, si bien que R_m est pris à 2 mm seulement de la surface du cylindre, ce qui est pour l'instant le cas limite pour l'insertion des fibres optiques. Legrand et al. (2010) montre que la reconstruction sur la base des travaux de Meierhofer and Stelson (1987) est impossible sous des conditions de Skinpass car les auteurs ont besoin d'un signal pris à 1 mm seulement de la surface, ce qui est peu envisageable du point de vue technologique. Dans cette étude cette difficulté est dépassée.

Il est également important de mentionner que le nombre de points de mesure N_m est choisi pour être cohérent avec la fréquence d'acquisition des fibres optiques (quelques kHz). Nous considérons une vitesse de rotation typique (1 tour par seconde), ainsi nous avons pour une fréquence de 1 kHz, $N_m = 1000$ points sur le cercle.

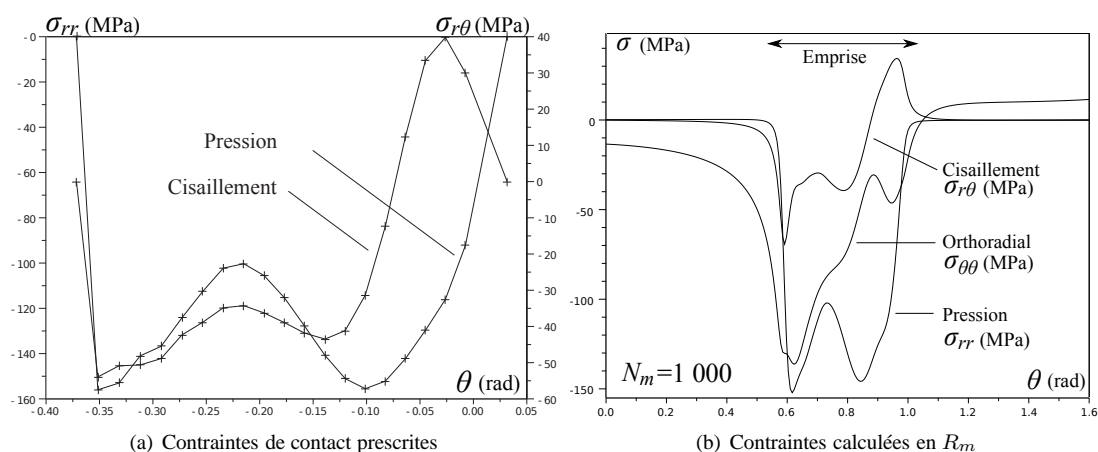


FIGURE 4.5 – Conditions de laminage à chaud

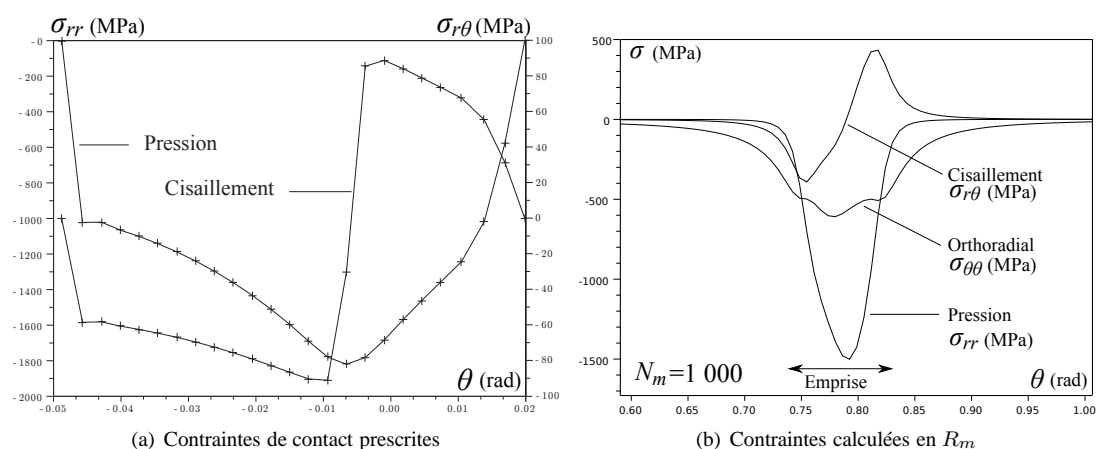


FIGURE 4.6 – Conditions de laminage à froid

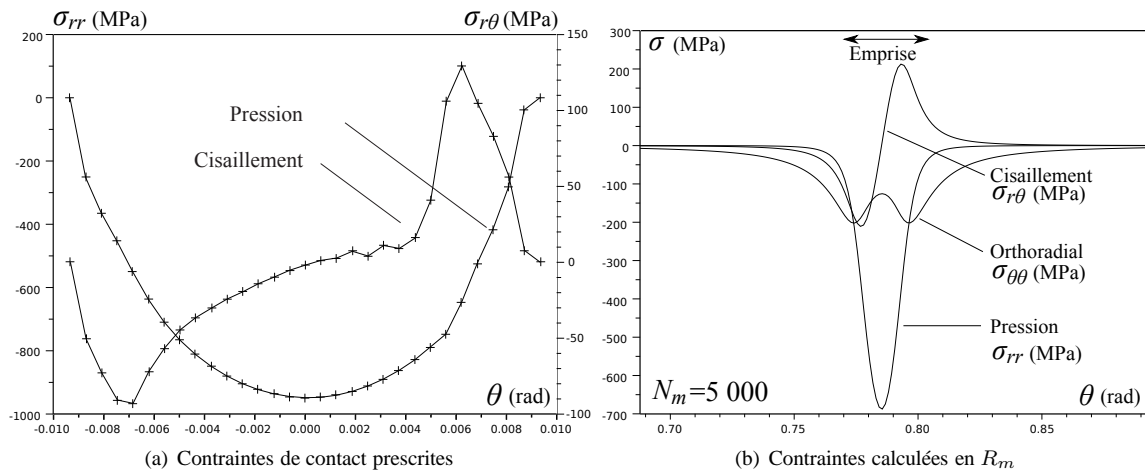


FIGURE 4.7 – Conditions de Skinpass

4.7.3. Résultats sans bruit de mesure

La méthode inverse est appliquée en prenant en entrée les signaux des figures 4.5(b), 4.6(b) et 4.7(b), et une comparaison est faite entre la reconstruction (sortie du calcul) et les contraintes de contact prescrites. Les résultats donnés par Legrand et al. (2010) sont confrontés à ceux que nous obtenons. Les figures 4.8, 4.9 et 4.11 présentent les reconstructions des contraintes de contact (avec différentes options discutées dans la suite).

Le nombre de troncature est choisi automatiquement grâce au modèle logarithmique (4.12). Ainsi les résultats ne correspondent pas exactement à la meilleure reconstruction possible par la méthode inverse, que nous avons développée, mais s'en rapprochent.

Laminage à chaud

Le problème est supposé isotherme. Cependant, pour des conditions de laminage à chaud, les contraintes thermiques ne sont pas négligeables, comme cela est démontré par exemple par Legrand et al. (2010). Cet aspect n'est pas étudié dans ce chapitre (les contraintes thermiques sont négligées), mais cette difficulté est dépassée au chapitre 5 où le problème thermique est résolu. Ainsi le problème couplé thermoélastique peut être résolu par superposition, ce qui est fait au chapitre 7.

Les figures 4.8(a) et 4.8(b) correspondent aux conditions de laminage à chaud. La troncature des sommes est faite à la 399 ième harmonique pour σ_{rr} (et à la 412 ième pour $\sigma_{r\theta}$). Les résultats présentés dans les figures 4.8(a) et 4.8(b) montrent que les contraintes reconstruites et les contraintes prescrites sont presque identiques et ne peuvent pas être distinguées facilement à cette échelle. Ainsi la nouvelle méthode inverse développée dans ce chapitre est beaucoup plus précise que les calculs présentés par Legrand et al. (2010) (fondés sur le travail de Meierhofer and Stelson (1987)). La position du point neutre que nous avons défini dans le chapitre 1 est très bien prédite, ce qui est un résultat important du point de vue industriel.

Tous les paramètres de simulation et de reconstruction ainsi que les erreurs de reconstruction en pourcentage et les temps indicatifs de calculs pour les deux méthodes sont listés dans le tableau 4.4. Les temps de calculs indiqués pour la programmation de Legrand et al. (2010) sont une estimation obtenue avec un processeur dualcore 2 GHz. N_{inv} est le nombre d'inversion de matrices d'identification de taille 4×4 , alors que la présente méthode inverse ne nécessite aucune inversion de matrice.

TABLE 4.4 – Résumé des conditions de laminage à chaud

	Legrand et al. (2010) ($rr/r\theta$)	Présente étude ($rr/r\theta$)
R_s (mm)	177.51	177.51
R_m (mm)	174.51	174.51
N_t	100	(399/412)
N_m	1000	1000
N_{inv}	200	0
ϵ (%)	(9.3/13.2)	(0.63/0.75)
Temps (s)	$\simeq 300$	$\simeq 0.07$

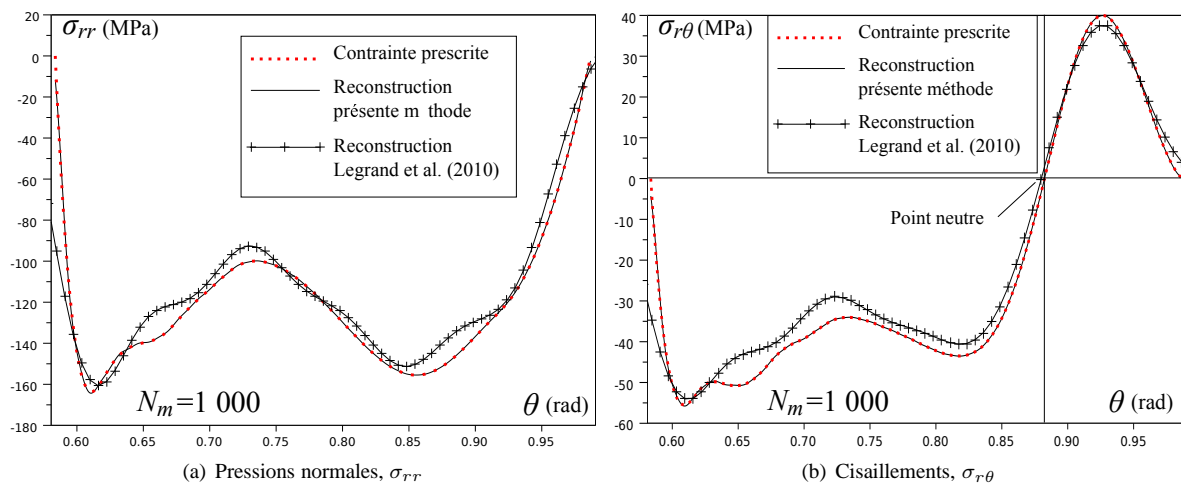


FIGURE 4.8 – Résultats en laminage à chaud sans bruit de mesure

Laminage à froid

Pour les conditions de laminage à froid les contraintes thermiques sont plus négligeables que dans le cas du laminage à chaud, comme a pu le montrer par exemple l'étude de Legrand et al. (2010). La troncature des sommes est faite à la 568 ième harmonique pour σ_{rr} (et à la 534 ième pour $\sigma_{r\theta}$). Comme pour le laminage à chaud, les résultats présentés par les figures 4.9(a) et 4.9(b) montrent que la méthode inverse, que nous avons présentée, est plus précise que les calculs de Legrand et al. (2010) (fondés sur le travail Meierhofer and Stelson (1987)). Le temps de calcul est très fortement réduit par rapport aux estimations du travail de Legrand et al. (2010).

Il est en particulier intéressant que la discontinuité des cisaillements soit correctement estimée par la méthode inverse de cette étude, en comparaison à la reconstruction de Legrand et al. (2010). Figure 4.9(c), il est notable que la reconstruction des cisaillements peut être considérablement améliorée en optant pour une acquisition à 2 kHz au lieu de 1 KHz (c'est-à-dire $N_m = 2000$). En effet, en doublant la fréquence, le signal d'entrée est beaucoup plus riche et les intégrales gagnent un ordre de précision. La discontinuité est alors bien reconstruite. Dans ce cas, la troncature peut être faite à des harmoniques plus hautes, la 1029 ième pour σ_{rr} (et à la 969 ième pour $\sigma_{r\theta}$).

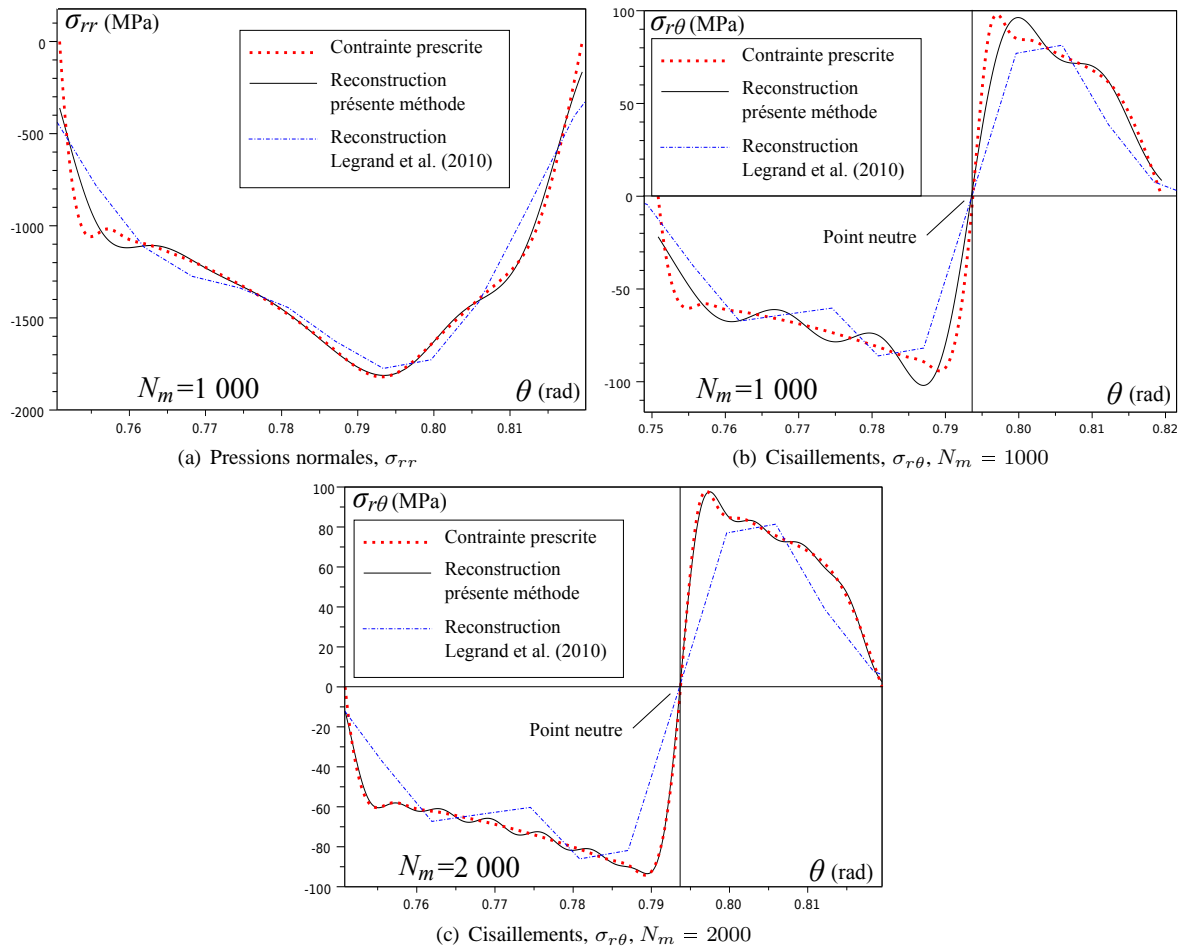


FIGURE 4.9 – Résultats en laminage à froid sans bruit de mesure

TABLE 4.5 – Résumé des conditions de laminage à froid

	Legrand et al. (2010) ($rr/r\theta$)	Présente étude ($rr/r\theta$)	Présente étude ($rr/r\theta$)
R_s (mm)	200	200	200
R_m (mm)	197	197	197
N_t	600	(568/534)	(1029/969)
N_m	1000	1000	2000
N_{inv}	1200	0	0
ϵ (%)	(8.6/26)	(4.14/13.20)	(1.83/2.64)
Temps (s)	$\simeq 2400$	$\simeq 0.07$	$\simeq 0.07$

En laminage à froid la friction entre le cylindre et la tôle est du type Coulomb avec une nette discontinuité des cisaillements au point neutre (où la vitesse de glissement entre le produit et l'outil change de sens). Alors que pour le laminage à chaud il existe potentiellement toute une zone où la vitesse de glissement entre le cylindre et la tôle peut être nulle, et donc les cisaillements peuvent ne pas être proportionnels aux pressions normales, comme le montre la figure 4.10.

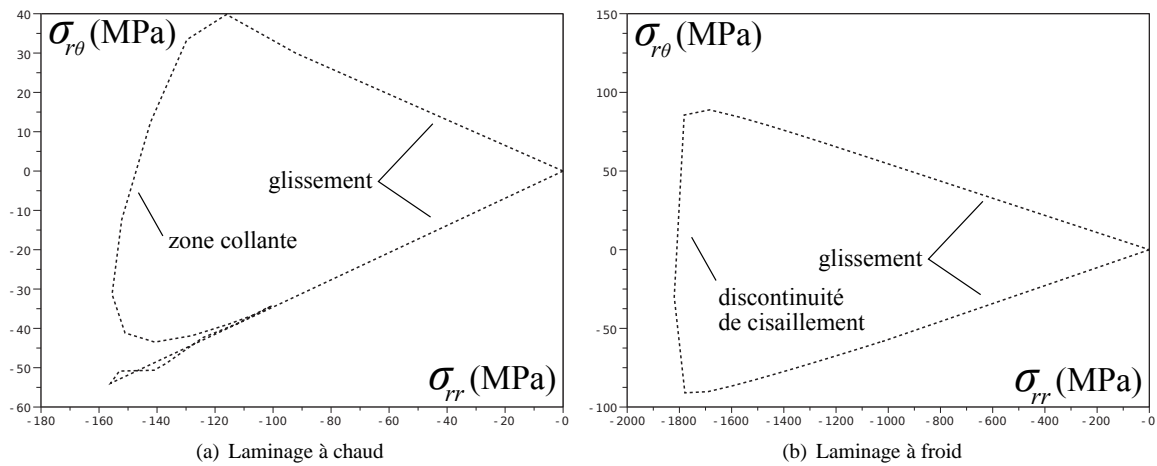


FIGURE 4.10 – Représentation de Mohr

Skinpass

Comme nous l'avons déjà précisé, Legrand et al. (2010) montre, qu'en se fondant sur l'article de Meierhofer and Stelson (1987), la reconstruction est impossible pour des conditions de type Skinpass à cause de la longueur très réduite de l'emprise et de la singularité des signaux. En effet, les auteurs ont besoin de calculer les signaux d'entrée à seulement 1 mm de la surface du cylindre, ce qui est peu envisageable du point de vue technologique. Les auteurs ont considéré une fréquence d'acquisition de 3 kHz à une vitesse classique d'un tour par seconde (c'est-à-dire $N_m = 3000$). Les résultats présentés figures 4.11(a) et 4.11(b) sont produits (pour la présente méthode) avec un signal entrant calculé à 2 mm de la surface du cylindre, ce qui est le cas limite envisagé pour une insertion précise des fibres optiques dans le projet européen RFS-PR-08051. La troncature est faite à la 1605^{ème} harmonique pour σ_{rr} (et à la 1371^{ème} pour $\sigma_{r\theta}$). Les résultats présentés figures 4.11(a) et 4.11(b) montrent une fois encore une bien meilleure performance de la présente méthode inverse.

Pour améliorer la reconstruction des cisaillements nous avons aussi considéré une fréquence d'acquisition de 5 kHz (c'est-à-dire $N_m = 5000$). Dans ce cas la troncature est faite à des harmoniques plus élevées, la 2487^{ème} pour σ_{rr} (et à la 2128^{ème} pour $\sigma_{r\theta}$). La figure 4.11(c) montre que la reconstruction devient satisfaisante. De plus le temps de calcul est extrêmement réduit par rapport aux calculs de Legrand et al. (2010).

TABLE 4.6 – Résumé des conditions Skinpass

	Legrand et al. (2010) ($rr/r\theta$)	Present study ($rr/r\theta$)	Present study ($rr/r\theta$)
R_s (mm)	257	257	257
R_m (mm)	256	255	255
N_t	1200	(1605/1371)	(2487/2128)
N_m	3000	3000	5000
N_{inv}	2400	0	0
ϵ (%)	(4.3/21.6)	(3.23/19.38)	(2.48/9.81)
Temps (s)	$\simeq 4800$	$\simeq 0.07$	$\simeq 0.07$

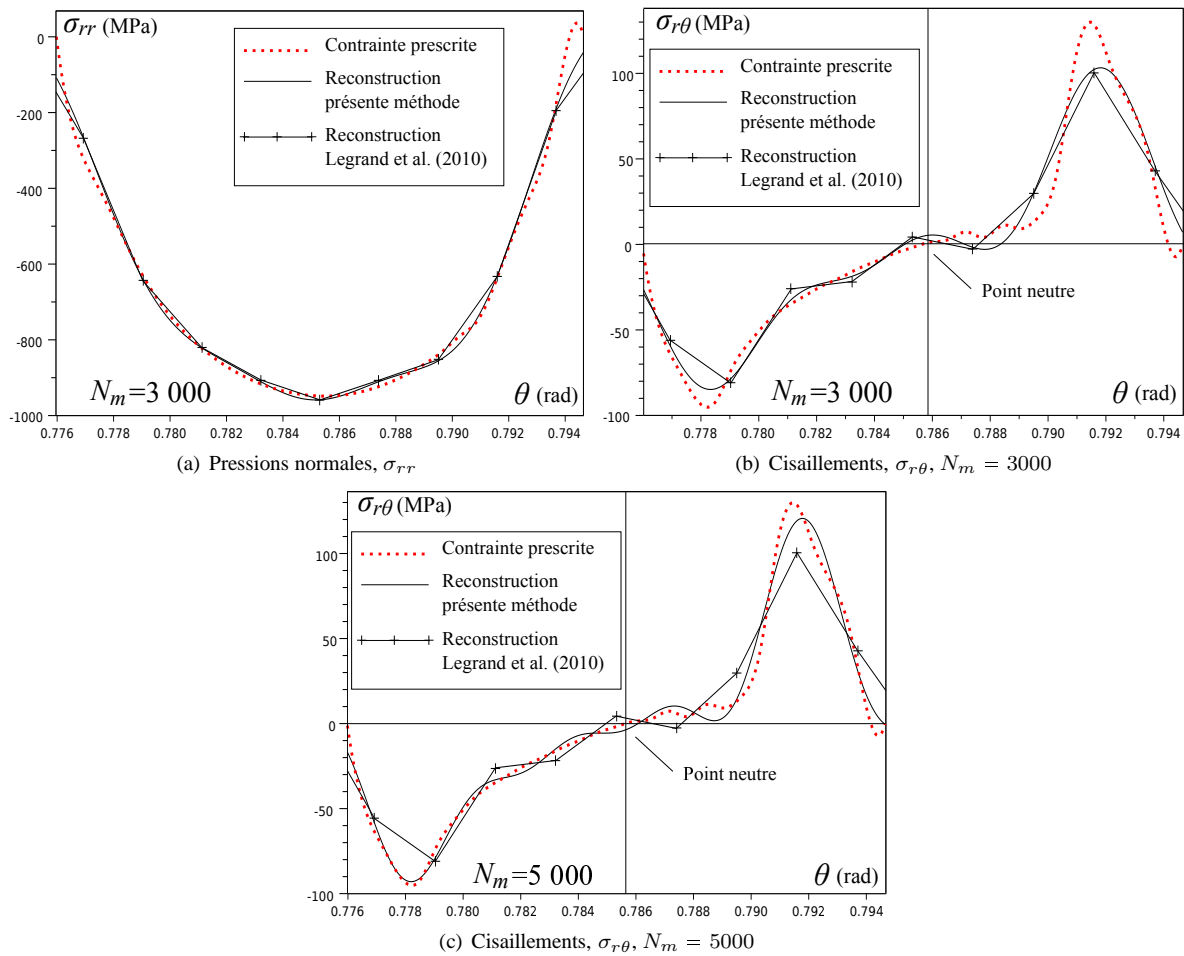


FIGURE 4.11 – Résultats en laminage Skinpass sans bruit de mesure

4.8. Bruit de mesure

En pratique, même si les mesures sont très bien effectuées, elles sont inévitablement bruitées. Chaque montage expérimental génère son propre niveau de bruit, sur certaines fréquences. Comme nous n'avons pas encore de mesures, nous ne pouvons que spéculer sur le type de bruit que nous aurons à gérer. Le plus fréquent est d'avoir un bruit très net sur les hautes fréquences, et un très léger bruit blanc sur toutes les fréquences. En pratique nous avons calculé la fft des signaux entrant et bruité toutes les fréquences avec une amplitude de 0.1 et les hautes fréquences (sur la fft on bruité la moitié supérieure des fréquences) avec une amplitude de 100 soit mille fois plus. En filtrant les hautes fréquences (nous n'avons pas cherché la perfection au niveau du filtre, nous avons simplement coupé les hautes fréquences), nous obtenons de bon résultats, pour les trois conditions de laminage comme le montre le tableau 4.7. Nous observons, que pour les cas plus délicats, nous obtenons à 2 kHz avec du bruit les résultats obtenus à 1 kHz sans bruit, dans le cas du laminage à froid et que nous obtenons à 5 kHz avec du bruit des résultats similaires à ceux obtenus à 3 kHz sans bruit, dans le cas Skinpass. Cela est dû au léger bruit blanc, qui réduit le nombre d'harmoniques dans la reconstruction. Nous ne reproduisons pas de figures montrant les reconstructions, car elles sont très similaires à celles déjà proposées dans le cas sans bruit de mesure. En revanche la figure 4.12 présente un échantillon du bruit artificiel ajouté aux signaux d'entrée avant d'être filtrés, pour les trois conditions de laminages considérées.

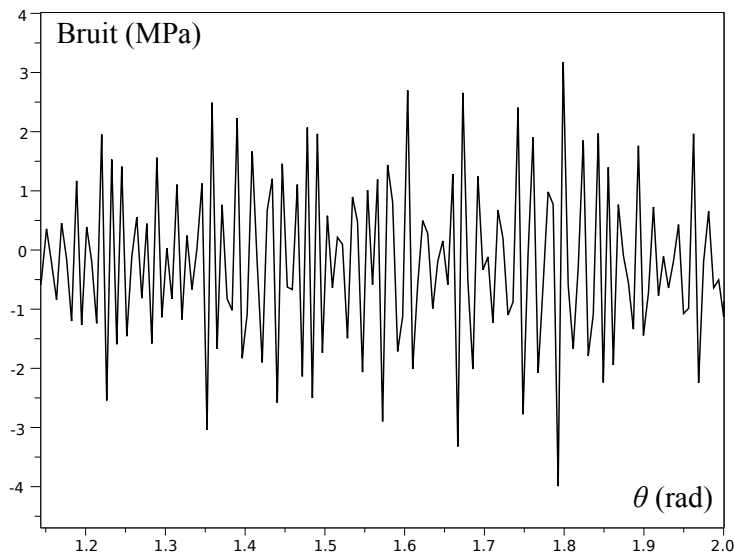


FIGURE 4.12 – Echantillon de bruit de mesure

TABLE 4.7 – Bruit de mesure

	Chaud ($rr/r\theta$)	Froid ($rr/r\theta$)	Skinpass ($rr/r\theta$)
R_s (mm)	177.51	200	257
R_m (mm)	174.51	197	255
N_t	(400/400)	(600/600)	(1600/1600)
N_m	1000	2000	5000
ϵ (%)	(1.2/1.6)	(4.2/14)	(3.5/25)
Temps (s)	$\simeq 0.07$	$\simeq 0.07$	$\simeq 0.07$
Figure	\simeq Fig.4.8	\simeq Fig.4.9(c)	\simeq Fig.4.11(b)

4.9. Conclusion

La méthode inverse analytique développée dans ce chapitre donne de très bons résultats pour trois conditions typiques de laminage industriel sans bruit de mesure sous hypothèse isotherme. Nous avons tenu compte de la limitation actuelle en fréquence d'acquisition des fibres optiques à quelques kHz. En pratique, les mesures sont bruitées. Nous avons testé la robustesse de la méthode à un léger bruit blanc (sur toutes les fréquences) et un fort bruit touchant les hautes fréquences du signal, que l'on traite ensuite par un filtre passe-bas. La qualité de reconstruction est moindre que dans le cas théorique sans bruit, mais n'est pas compromise.

Une amélioration très importante est la simplification du système local de mesures (un seul point de mesure sous la surface du cylindre), alors que deux mesures à deux positions radiales différentes étaient nécessaires dans les travaux antérieurs. Le second aspect essentiel est la possibilité de traiter des signaux extrêmement singuliers comme ceux obtenus pour le Skinpass, là où les méthodes antérieures échouent. La troisième amélioration est le temps de calcul de la formulation analytique que nous avons proposée, qui permet une interprétation en temps réel des mesures, et permet d'envisager une boucle d'asservissement dans le futur. Ainsi les calculs (pour 55 points de reconstruction) se font en 0.07 seconde avec un processeur quadcore 2.8 GHz (temps de calcul affichés par Scilab 5.3). Ainsi cette méthode répond à un double enjeu, la clarté de la formulation mathématique analytique dans le corps des complexes, ainsi que l'efficacité et la robustesse pour une utilisation industrielle.

Des études expérimentales complémentaires seront à mener dès que la technologie d'insertion des fibres optiques dans le cylindre sera aboutie. Des essais en laboratoire d'une part et sur un laminoir industriel d'autre part sont en cours de développement, et n'apparaissent donc pas dans ces travaux de thèse.

CHAPITRE V

ÉVALUATION DE LA TEMPÉRATURE ET DES FLUX

Ce chapitre est une adaptation d'un article publié dans International Journal of Heat and Mass Transfer (Weisz-Patrault et al. (2012a)). La connaissance du champ de température dans le cylindre de travail fait l'objet d'une attention particulière. Dans ce chapitre le champ de température est obtenu dans tout le cylindre par méthode inverse, et en particulier la température de surface dans le contact. Les flux de chaleur sont également accessibles. Pour cela nous mesurons la température grâce à un unique thermocouple fixé sous la surface du cylindre. De même que dans le chapitre précédent, les méthodes itératives sont écartées en raison des temps des calcul trop importants qu'elles engendrent. Une hypothèse est nécessaire pour prendre en compte le fait que les mesures sont relatives à des temps successifs et non toutes au même instant. L'équation de la chaleur non stationnaire est résolue analytiquement. La solution est validée en prescrivant un champ de température connu dans le cylindre, correspondant à une condition de laminage à chaud. Un très bon niveau de précision est atteint. De plus une comparaison avec une méthode inverse numérique est proposée pour montrer l'efficacité de la présente étude. Cette comparaison est faite à partir d'une simulation numérique qui prescrit un champ de température en surface avec des conditions typiquement industrielles (c'est-à-dire à vitesse de rotation élevée et pour une longueur d'emprise réduite). Le traitement du bruit de mesure est abordé comme au chapitre précédent. Par ailleurs nous démontrons qu'un calibrage est nécessaire pour définir la position du capteur. De même que pour le chapitre précédent, les temps de calcul sont très réduits (0.05 s/tour).

5.1. Introduction

5.1.1. Problème thermique

La connaissance des flux de chaleur entrant dans le cylindre de travail en laminage à chaud, permettrait une meilleure évaluation de la fatigue thermique, qui est l'une des causes majeures de l'usure des cylindres, comme le montre Corral et al. (2004), qui a proposé un modèle analytique simplifié pour les problèmes thermique et thermoélastique. Li et al. (2007) a proposé plus récemment un modèle tridimensionnel par éléments finis (Finite Element Method : FEM), qui permet d'évaluer les contraintes thermiques du cylindre de travail. La fatigue thermique est complètement négligeable en laminage à froid. Cependant, la caractérisation du problème thermique contribuerait à connaître la viscosité et l'épaisseur du lubrifiant dans l'emprise. En outre, les déformations thermiques du cylindre ont un rôle central à jouer dans la prédiction de la planéité du produit.

5.1.2. Modèles prédictifs

Nous précisons ce qui a déjà été dit en introduction au chapitre 1. Beaucoup de travaux se concentrent sur le problème thermique en laminage. Tseng et al. (1990) a développé une approche directe analytique en régime stationnaire (indépendante du temps). Guo (1998) a proposé une solution semi-analytique, fondée sur la transformée de Laplace (et de la transformée inverse) pour aborder le problème non stationnaire sous conditions de laminage typiques. Tseng (1984) a proposé un algorithme en 2D stationnaire, fondé sur la technique des différences finies (Finite Difference Method : FDM). Zone-Ching and Chang-Cheng (1995) ont développé un modèle en 3D (par FDM) avec des conditions à la frontière complexes pour prédire le champ de température dans le cylindre. Pour optimiser la géométrie des jets d'eau du système de refroidissement Saboonchi and Abbaspour (2004) ont proposé

un modèle simplifié (par FDM), qui calcule le champ de température en 3D dans le cylindre. L'équation de la chaleur est traitée par un calcul où l'angle et le temps sont reliés par la vitesse de rotation du cylindre (l'indice de temps et celui de l'angle sont les mêmes). Zhang et al. (2002) et Zhang et al. (2006) (ces deux auteurs portent le même nom) ont proposé respectivement une méthode aux différences finies et une méthode aux éléments finis pour prédire le champ de température et les déformations thermiques en négligeant les variations de température sur la circonférence du cylindre, mais en prenant en compte les variations le long de l'axe du cylindre (calcul de bombé thermique global du cylindre). Montmitonnet (2006) a également proposé un modèle prédictif (par FEM) de tout le procédé de laminage, en couplant par méthode itérative une tôle thermo-visco-plastique et un cylindre thermoélastique.

5.1.3. Objectifs du chapitre

Tous les modèles prédictifs que nous avons cités sont théoriques. Généralement les champs de température expérimentaux sont obtenus par caméra infrarouge. Cependant la lubrification intensive (émulsion d'eau et d'huile), le refroidissement par jet d'eau et la zone de contact entre la tôle et le cylindre, ne permettent pas d'utiliser une telle caméra dans le contexte industriel. Une analyse inverse est donc nécessaire. Dans ce chapitre, nous développons une méthode analytique qui interprète les mesures de température d'un seul thermocouple placé sous la surface du cylindre. La solution développée, donne le champ de température et le gradient (flux de chaleur) dans tout le cylindre. Mais la principale sortie du calcul est la reconstruction des températures de surface et du flux de chaleur entrant dans le cylindre, car ce sont les données les plus utiles. L'approche, que nous proposons ici, est fondée sur la résolution analytique de l'équation de la chaleur pour un corps tournant en régime non stationnaire, que nous avons démontré au chapitre 3. Nous devons faire une hypothèse pour tenir compte du fait que les mesures sont successives (de même que précédemment la rotation du cylindre donne un cercle de mesures, cf figure 1.2). La figure suivante 5.1 rappelle schématiquement le problème.

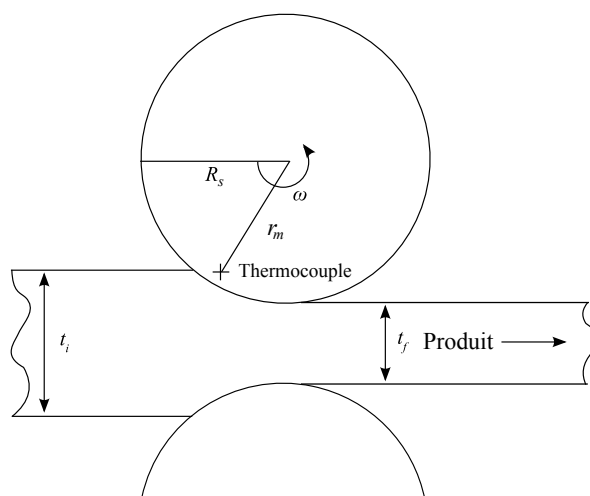


FIGURE 5.1 – Mesures de la température

5.1.4. Méthodes inverses et interprétation de mesures

Dans le champ général des méthodes inverses thermiques de très nombreux travaux voient constamment le jour. Blum and Marquardt (1997) ont donné une revue utile des travaux existants et ont proposé eux-mêmes une méthode numérique fondée sur une interprétation de l'équation de la chaleur non stationnaire en filtre passe-bas. La grande majorité des travaux cités sont numériques. Raynaud and Bransier (1986) avec l'algorithme de retour vers la surface, Alifanov (1994) avec les méthodes de régularisation, Beck et al. (1985) avec la fonction de spécification ou Scarpa and Milano (1995) avec la technique des filtres de Kalman, introduisent tous une discrétisation spatiale et/ou temporelle.

Concernant le problème spécifique du laminage, plusieurs méthodes inverses existent déjà. Tseng et al. (1995) a proposé une inversion par FEM. Les mesures sont utilisées pour quantifier le flux de chaleur dans l'emprise. Les coefficients de transferts thermiques dans la zone d'arrosage sont évalués grâce à la technique des coefficients de conduction inverses (IHC). Beaucoup de méthodes inverses itératives sont fondées sur l'identification des mesures de température en entrée et des valeurs de températures calculées numériquement par le modèle à partir d'une condition de bord donnée a priori. La minimisation au sens des moindres carrés et/ou des méthodes du gradient conjugué sont alors souvent employées. Huang et al. (1995) a proposé une analyse inverse, en régime non stationnaire, fondée sur le gradient conjugué pour les flux de chaleur dans le contact tôle/cylindre, en mesurant la température en un point sous la surface du cylindre. La méthode itérative (environ 35 itérations) consiste (pour chaque itération) à résoudre numériquement le problème direct (les conditions a priori donnent la température sous la surface, là où la mesure est effectuée), le problème de sensibilité et le problème adjoint pour stabiliser la solution. Cependant pour ne pas alourdir trop les temps de calcul Huang et al. (1995) a proposé un maillage qui ne couvre que les premiers millimètres d'épaisseur du cylindre en faisant l'hypothèse que le flux radial est négligeable en dessous d'une certaine profondeur. Pour les très long temps de laminage cette hypothèse tombe en défaut, car le profil de température varie du centre jusqu'à la surface (et non seulement sur les quelques premiers millimètres, bien que ceci ne soit pas très marqué). Hsu et al. (2000) et Keanini (1998) ont proposé des méthodes inverses en 2D¹ pour évaluer les flux de chaleur entrant dans le cylindre en mesurant la température à de nombreuses positions radiales et axiales différentes (beaucoup de thermocouples insérés). Ces contributions sont fondées sur des FDM ou FEM, des formes matricielles et la technique des moindres carrés. Plus récemment Chen and Yang (2010) ont proposé une méthode inverse itérative fondée sur la technique du gradient conjugué. Les auteurs ont maillé le cylindre en entier et ont raffiné le maillage près de l'emprise. Cependant, ces travaux sont développés en régime stationnaire.

Plusieurs contributions interprètent des mesures de température expérimentales (et non simulées). Tavares et al. (2001) a proposé une méthode inverse fondée sur un modèle unidimensionnel (repère tournant à la même vitesse que le cylindre). Le temps de réponse du thermocouple est étudié et une correction est ainsi apportée aux mesures. Kotrbacek et al. (2006) a proposé une approche inverse 2D numérique et exhaustive, où le thermocouple est modélisé pour interpréter les mesures et optimiser le système de refroidissement. Un algorithme dérivé de ces travaux² a servi de comparaison pour évaluer la performance de la solution analytique que nous présentons dans ce chapitre. Dans la suite, nous nommerons cette méthode : l'algorithme N.

5.1.5. Choix de la méthode

Des travaux plus anciens proposent des solutions analytiques inverses de l'équation de la chaleur en régime non stationnaire comme ceux de Kudryavtsev (1966). Dans quelques cas particuliers, ces méthodes exactes sont assez simples et efficaces. Dans ce chapitre (et plus largement dans ces travaux de thèse) la résolution analytique est préférée du fait de la grande simplicité de la géométrie et de la linéarité des équations à résoudre. En outre, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les solutions analytiques se superposent facilement, ainsi le problème couplé thermoélastique pourra être traité.

D'autre part comme nous l'avons répété, les temps de calcul sont optimisés pour être les plus réduits possible en vue d'une interprétation des mesures en temps réel. Cette contrainte oblige à écarter la plupart des travaux numériques cités (itératifs et assez lent). Les temps de calcul obtenus avec les développements qui suivent sont d'environ 0.05 seconde par tour de laminoir avec un processeur quadcore 2.8 GHz (temps affiché par Scilab 5.3).

5.1.6. Validation de la méthode

La méthode inverse, que nous allons présenter admet en entrée les températures mesurées sous la surface du cylindre à un rayon noté³ r_m (mm) et a pour sortie de calcul la température (et les flux de chaleur) à la surface du cylindre (dont le rayon est noté R_s (mm)). La profondeur du thermocouple est discutée à la section 5.7 et nous considérons une erreur de 10 % de la profondeur du capteur à la section 5.10.4 pour introduire la notion de

1. Bien que ces méthodes se réclament être 3D, seules les variables d'espace radiale et axiale interviennent, ainsi les variations selon l'angle sont assimilées au temps via la vitesse de rotation (repère tournant à la même vitesse que le cylindre), tous les termes liés à la variable d'angle sont retirés de l'équation de la chaleur qui a une forme très simplifiée (où la vitesse de rotation n'intervient pas).

2. développé par Pohanka, M de Brno University of Technology, Tchéquie

3. La notation a déjà été utilisé pour le rayon de mesure des déformations, qui est différent de celui envisagé pour les températures. Le couplage thermoélastique fera intervenir dans le même chapitre les deux notations.

calibrage. Habituellement les conditions aux limites d'une méthode inverse thermique sont obtenues en identifiant (matching) les entrées et les sorties du système d'équation (méthodes itératives que nous avons citées). Dans ce cas la précision s'évalue en analysant une déviation entre les mesures et le modèle pour détecter un biais éventuel. La plupart des travaux cités à la section 5.1.4 utilisent cette approche.

La méthode analytique développée ici n'appartient pas à cette classe de méthode. Les mesures successives de température faites au rayon r_m permettent d'établir une solution valable dans tout le cylindre y compris à la surface. Donc l'approche ne nécessite aucun matching de données. Comme nous l'avons précisé en introduction au chapitre 1, nous cherchons simplement une solution sur le sous-domaine borné par le cercle des mesures et nous étendons la solution par continuité.

Pour valider la solution et évaluer son niveau de précision, nous prescrivons un champ de température analytique⁴, dont il est aisé d'extraire les données au rayon r_m que nous prenons comme valeurs d'entrée du calcul (qui remplacent les mesures). Le champ de température prescrit est proche des champs que l'on trouve typiquement en laminage à chaud comme on peut l'observer grâce aux modèles prédictifs. La solution inverse est validée en comparant les sorties du calcul (température de surface et flux de surface) au champ analytique prescrit (en température et flux) évalué au rayon R_s . L'erreur relative entre ces deux signaux est utilisée pour quantifier la qualité de la méthode en pourcentage. Une très bonne précision est obtenue, car les signaux ne sont pas très singuliers (correspondants à des cas de laminage à chaud avec de fortes réductions d'épaisseur). La méthode se comporte très bien en ajoutant un fort bruit blanc sur toutes les fréquences. Une seconde validation est faite et utilise cette fois une simulation du procédé industriel par différences finies. Les signaux sont beaucoup plus singuliers (la zone de contact est réduite du fait des faibles épaisseurs considérées). Néanmoins la méthode inverse, que nous développons ici, donne de très bons résultats, qui sont comparés à ceux de l'algorithme N. Il apparaît clairement que la méthode analytique est beaucoup plus fiable et performante. La résistance au bruit de mesure est également évaluée sur ce cas plus difficile, et de même que pour le chapitre précédent nous supposons un bruit fort sur les hautes fréquences du signal, ainsi qu'un très léger bruit blanc. En filtrant grâce à un filtre passe-bas la précision n'est pas compromise. Par ailleurs même en ajoutant un bruit blanc sur toutes les fréquences, la reconstruction reste tout de même très acceptable.

5.1.7. Référentiel eulérien

L'évolution temporelle de la température d'un point matériel du cylindre (description lagrangienne) est très rapide⁵. La dépendance en temps pourrait être difficile à modéliser, c'est la raison pour laquelle une description eulérienne est préférée de façon à obtenir une évolution lente du champ de température (faibles variations de la carte des températures d'un tour à l'autre). Un point eulérien (r position radiale, θ position angulaire) n'est pas matériel, c'est-à-dire qu'il décrit une succession de points matériels passant par une position de l'espace repérée dans un référentiel fixe. Dans la suite, toutes les quantités sont eulériennes.

5.2. Intervalles de temps

Si les tours sont numérotés et indicés par k , il est commode de découper l'intervalle de temps total en sous intervalles du type $[t_k, t_{k+1}]$ avec $t_k = 2(k-1)\pi/\omega$ étant le temps au début du tour k (considérant que la vitesse de rotation ω (rad/s) est au moins constante tour par tour, ce qui revient à dire que l'évolution de ω est très lente devant la durée d'un tour, ce qui est très exact. Pour un changement brutal de vitesse de rotation au cours d'un tour, la méthode inverse est utilisable au tour suivant). Les signaux d'entrée sont les températures mesurées au rayon r_m . Cependant, puisqu'il n'y a qu'un seul point de mesure, le signal mesuré est spécifié à différentes positions angulaires, correspondant à différents temps successifs. La rotation du cylindre permet d'obtenir une information sur tout le cercle de rayon r_m mais pas à chaque instant. Chaque position angulaire est connue à un temps particulier, selon la fréquence d'acquisition f (Hz) et la vitesse de rotation ω . Donc les signaux d'entrée dépendent seulement de la position angulaire θ (ou des temps correspondants $t_\theta^k = t_k + \theta/\omega$) et de l'indice du tour courant k . Ces signaux mesurés sont donc notés $T^m(\theta, k)$ où m signifie mesure (dans ce chapitre les signaux sont simulés et remplacent les mesures). L'ensemble des notations est spécifié dans le tableau 5.1.

4. solution de l'équation de la chaleur en régime non stationnaire

5. Le point matériel est soumis au cours d'un tour à la zone chaude de l'emprise puis au refroidissement du cylindre

TABLE 5.1 – Nomenclature

R_s	Rayon du cylindre	T^p	Température prescrite
r_m	Rayon de mesure	H^p	Flux de chaleur prescrit
e	Erreur de profondeur	T_a	Température ambiante
ω	Vitesse de rotation	T^*	Température environnante
r	Position radiale	T_{ext}	Maximum de T^*
θ	Position angulaire	HTC	Coefficient de transfert thermique
t	Temps	N_j	Ordre de troncature ($j \in \llbracket 0; \dots; 4 \rrbracket$)
k	Indice du tour courant	N_θ	Nombre de points de reconstruction
t_k	Temps au début du k ième tour ($= 2(k-1)\pi/\omega$)	ζ_n	Coefficients (complexes)
t_θ^k	Temps lié à la position angulaire ($= t_k + \theta/\omega$)	J_n	Fonction Bessel de première espèce d'ordre n
f	Fréquence d'acquisition	$x_{n,p}$	Racines de J_n
λ	Conductivité thermique du cylindre	$u_{n,k}$	Fonction auxiliaire de r
D	Diffusivité thermique du cylindre	$\gamma_{n,p,k}$	Coefficients (réels)
ϵ	Erreur de reconstruction	$\beta_{n,p}$	Coefficients (réels)
T	Température (solution)	$a_{n,q}$	Coefficients (complexes)
T_1	Première partie de la solution	b_n	Coefficients (complexes)
T_2	Seconde partie de la solution	f_2	Fonction de r et de t
T^m	Températures mesurées (entrées)	h_n	Fonction auxiliaire
\hat{T}_n^k	n ième coefficient de Fourier de T^m (k ième tour)	$y_{n,q}$	Racines de h_n
g	Ordre du filtre anti effet de Gibbs	γ	Coefficient (complexe)
T^s	Température à la surface du cylindre (sorties)	τ	Coefficient (complexe)
H^s	Flux de chaleur de surface	Θ	Angle

5.3. Problème

La solution de l'équation non stationnaire de la chaleur est notée $T(r, \theta, t, k)$ (r et θ étant les coordonnées polaires, t étant le temps et k étant l'indice du tour). Il doit être noté que t et k sont reliés ($t \in [t_k, t_{k+1}]$). Donc les températures de surface (sorties) sont $T^s(\theta, t, k) = T(R_s, \theta, t, k)$, où s signifie surface. Le flux radial à la surface du cylindre est noté $H^s(\theta, t, k) = \lambda(\partial T / \partial r)(R_s, \theta, t, k)$. D (m²/s) est la diffusivité thermique du cylindre (supposée indépendante de la température). Nous avons démontré au chapitre 3 qu'avec une description eulérienne, l'équation de la chaleur non stationnaire, sans terme de source, gouvernant $T(r, \theta, t, k)$ pour un matériau isotrope homogène est pour le tour k :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (5.1)$$

Avec l'ensemble de conditions :

$$\begin{cases} (r, \theta, t, k) \in [0, R_s] \times [0, 2\pi[\times [t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{N}^* \\ T(r, \theta, t_k, k) = \begin{cases} T_a & k = 1 \\ T(r, \theta, t_k, k-1) & k \geq 2 \end{cases} \quad (\text{condition initiale}) \\ T(R_s, \theta, t, k) \text{ (conditions aux limites partielles inconnues)} \end{cases} \quad (5.2)$$

Pour le premier tour la condition initiale est la température ambiante dans tout le cylindre. Pour les tours suivants, la condition initiale est le champ de température à la fin du tour précédent. En outre, il est notable que $r = 0$ n'étant pas une borne du problème, aucune condition n'est requise en ce point (outre le fait évident que la température doit rester finie)

Pour résoudre l'équation (5.1) avec les conditions (5.2), le domaine spatial est divisé en deux :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 = [0, r_m] \times [0, 2\pi[\\ \mathcal{D}_2 =]r_m, R_s] \times [0, 2\pi[\end{cases} \quad (5.3)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous résolvons l'équation non stationnaire de la chaleur (5.1) sur le sous-domaine \mathcal{D}_1 , et nous étendons par continuité la solution. Ainsi, l'inversion du problème consiste uniquement à

prolonger la solution dans \mathcal{D}_2 . Cependant les conditions aux limites ne sont pas complètes, car la température au rayon r_m n'est pas connue à chaque instant sur tout le cercle de mesure (seulement connue pour $t_\theta^k = t_k + \theta/\omega$). Cette difficulté est dépassée en faisant une hypothèse discutée à la section 5.6.2. Deux nouveaux ensembles de conditions sont définis :

$$\text{(Partie directe)} : \begin{cases} (r, \theta, t, k) \in \mathcal{D}_1 \times [t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{N}^* \\ T(r, \theta, t_k, k) = \begin{cases} T_a & k = 1 \\ T(r, \theta, t_k, k-1) & k \geq 2 \end{cases} \quad \text{(condition initiale)} \\ T(r_m, \theta, t_\theta^k, k) = T^m(\theta, k) \quad \text{(conditions aux limites partielles)} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\text{(Partie inverse)} : \begin{cases} (r, \theta, t) \in \mathcal{D}_2 \times [t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{N}^* \\ T(r, \theta, t_k, k) = \begin{cases} T_a & k = 1 \\ T(r, \theta, t_k, k-1) & k \geq 2 \end{cases} \quad \text{(condition initiale)} \end{cases} \quad (5.5)$$

5.4. Famille de solutions

L'espace vectoriel des solutions de (5.1) est de dimension infinie. Puisque le problème est linéaire, une technique bien connue, pour exhiber des solutions, est d'écrire une combinaison linéaire d'une famille de solutions. Dans cette optique, il est facile de démontrer (preuve faite au chapitre 3, il suffit de développer la solution en série de Fourier et de séparer les variables) que la fonction donnée par (5.6) est bien solution de (5.1).

$$\gamma J_n \left(\sqrt{\frac{1}{D\tau} - \frac{i\omega n}{D}} r \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \exp(in\theta) \quad (5.6)$$

où n est un entier, γ et τ sont des nombres complexes, et J_n est la n ième fonction de Bessel de première espèce définie pour une variable complexe (cf chapitre 2). La solution est recherchée sous forme d'une combinaison linéaire de la famille de solutions (5.6), telle que :

1. Les conditions aux limites partielles de (5.4) soient vérifiées
2. La condition initiale de (5.4) et de (5.5) soit vérifiée

Ces deux conditions sont traitées séparément. La solution est écrite $T = T_1 + T_2$, où la solution T_1 vérifie la condition 1 mais a une condition initiale libre. T_2 vérifie la condition initiale 2 (à laquelle on soustrait le champ de température initial de la solution T_1) et s'annule au rayon de mesure r_m . Il s'agit en fait d'un terme stationnaire et d'un terme de dérive (ou terme transitoire), comme nous le verrons. Cette décomposition est résumée figure 5.2.

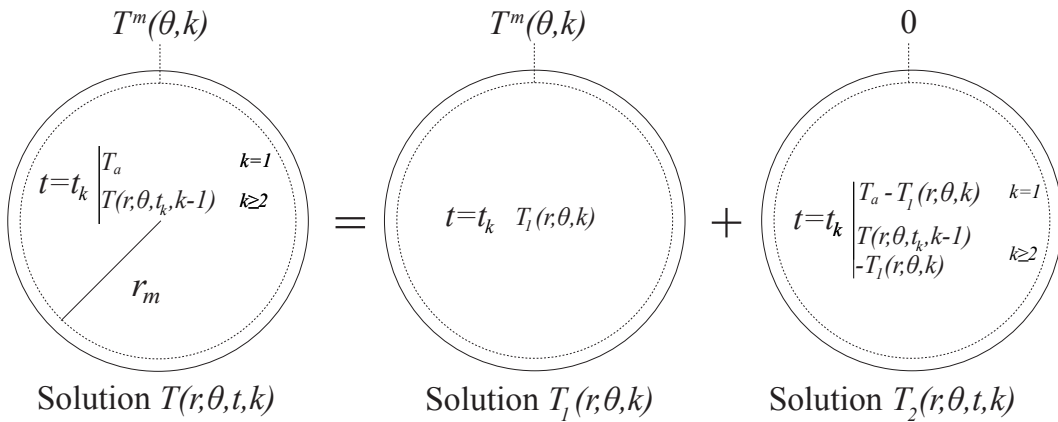


FIGURE 5.2 – Superposition pour chaque tour

5.5. Solution analytique pour chaque tour

Une solution de (5.1) sous la forme de (5.6) et vérifiant les conditions (5.4) et (5.5) est exhibée. Nous donnons directement le résultat, puis nous expliciterons la démarche pour l'obtenir. Pour chaque tour d'indice k :

$$T(r, \theta, t, k) = 2 \sum_{n=0}^{N_1} \text{sinc}^g \left(\frac{n}{N_1} \right) \text{Re} \left[\hat{T}_n^k \frac{J_n(\zeta_n r)}{J_n(\zeta_n r_m)} \exp(in\theta) \right] + 2 \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{p=1}^{N_2} \text{Re} \left[\gamma_{n,p,k} J_n \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right) \exp \left(-\frac{t-t_k}{\tau_{n,p}} \right) \exp(in\theta) \right] \quad (5.7)$$

Une excellente approximation est obtenue en ne conservant que $n = 0$ dans le terme de droite (ce qui réduit significativement le nombre de termes à calculer) :

$$T(r, \theta, t, k) = 2 \sum_{n=0}^{N_1} \text{sinc}^g \left(\frac{n}{N_1} \right) \text{Re} \left[\hat{T}_n^k \frac{J_n(\zeta_n r)}{J_n(\zeta_n r_m)} \exp(in\theta) \right] + \sum_{p=1}^{N_2} \gamma_{0,p,k} J_0 \left(x_{0,p} \frac{r}{r_m} \right) \exp \left(-x_{0,p}^2 \frac{D(t-t_k)}{r_m^2} \right) \quad (5.8)$$

où g est un nombre entier (dans la suite on prendra 1 ou 0), $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$, les ordres de troncature des sommes N_0 , N_1 et N_2 sont des entiers, les coefficients $\gamma_{n,p,k}$ sont simplement obtenus par (5.24), $\tau_{n,p}$ est un temps de relaxation défini par (5.18), ζ_n est le nombre complexe suivant $\zeta_n = (1-i)\sqrt{\omega n/2D}$ et \hat{T}_n^k sont les coefficients de Fourier de $T^m(\theta, k)$ (le signal d'entrée mesuré pendant le tour k).

Donc la température de surface (sortie du calcul) est donnée explicitement par :

$$T^s(\theta, t, k) = 2 \sum_{n=0}^{N_1} \text{sinc}^g \left(\frac{n}{N_1} \right) \text{Re} \left(\hat{T}_n^k \frac{J_n(\zeta_n R_s)}{J_n(\zeta_n r_m)} \exp(in\theta) \right) + 2 \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{p=1}^{N_2} \text{Re} \left[\gamma_{n,p,k} J_n \left(x_{n,p} \frac{R_s}{r_m} \right) \exp \left(-\frac{t-t_k}{\tau_{n,p}} \right) \exp(in\theta) \right] \quad (5.9)$$

Le flux radial correspondant entrant dans le cylindre est :

$$H^s(\theta, t, k) = 2\lambda \sum_{n=0}^{N_1} \text{sinc}^g \left(\frac{n}{N_1} \right) \text{Re} \left(\hat{T}_n^k \zeta_n \frac{J'_n(\zeta_n R_s)}{J_n(\zeta_n r_m)} \exp(in\theta) \right) + 2\lambda \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{p=1}^{N_2} \text{Re} \left[\frac{\gamma_{n,p,k} x_{n,p}}{r_m} J'_n \left(x_{n,p} \frac{R_s}{r_m} \right) \exp \left(-\frac{t-t_k}{\tau_{n,p}} \right) \exp(in\theta) \right] \quad (5.10)$$

La procédure d'inversion est résumée figure 5.3.

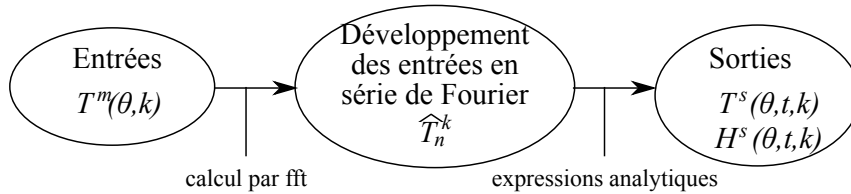


FIGURE 5.3 – Procédure d'inversion pour chaque tour

La solution (5.7) est par construction une solution de (5.1), mais l'ensemble des conditions (5.4) et (5.5) sont approximativement vérifiées, car une hypothèse est nécessaire : pendant un tour le champ de température varie peu, cela revient à dire que l'évolution de la carte des températures est beaucoup plus lente que la durée d'un tour. La solution (5.7) est établie dans les sections 5.6 et 5.8.

5.6. Condition au rayon de mesure

5.6.1. Restrictions du système de mesure

La solution T est cherchée sous la forme $T = T_1 + T_2$. La solution T_1 doit uniquement s'identifier à la température mesurée $T^m(\theta, k)$ au rayon r_m (c'est-à-dire vérifiant les conditions aux limites partielles (5.4)), et T_2 doit corriger T_1 de telle sorte que la solution globale vérifie la condition initiale de (5.4) et (5.5). Si les températures étaient connues sur tout le cercle de rayon r_m à chaque instant, il aurait été possible de développer les mesures en série de Fourier avec des coefficients de Fourier dépendant du temps. L'identification de ces coefficients en exponentielles temporelles décroissantes, aurait permis d'écrire la solution T_1 sous la forme de (5.6). Cependant le système de mesure étant un unique thermocouple inséré sous la surface, les températures sont mesurées pour des positions angulaires différentes à des temps successifs. Donc le développement en série de Fourier, du signal mesuré en r_m , avec des coefficients dépendants du temps est impossible, parce que cela nécessiterait d'intégrer à chaque instant sur tout le cercle de mesure.

Considérant plusieurs tours, il serait à la limite possible de construire intelligemment la température à chaque position angulaire à chaque instant⁶ avec des techniques fonctions poids comme cela a été tenté par Tseng et al. (1989), mais la solution serait complètement dépendante du choix de cette construction. Une approche beaucoup plus simple est préférée dans la suite de cette étude.

5.6.2. Hypothèse

Pour déterminer T_1 une hypothèse est faite (du fait du système de mesure). Il est supposé que l'évolution de la carte des températures est beaucoup plus lente que la durée d'un tour. Cette hypothèse nécessaire est très bien vérifiée sur les simulations numériques produites par les modèles prédictifs cités dans l'introduction de ce chapitre. La durée d'un tour constitue un temps caractéristique du problème. Ainsi la dépendance temporelle de T_1 doit être considérée pour des incréments de temps d'un tour. Cela signifie que l'évolution temporelle de T_1 au cours d'un tour est indéterminable avec un tel système de mesure. L'évolution temporelle de T_1 est seulement obtenue d'un tour à l'autre. Cependant l'hypothèse que nous avons faite est très bien vérifiée et les résultats de cette étude montrent que cela est très largement suffisant pour l'utilisation industrielle visée.

Du fait que la solution $T_1(r, \theta, k)$ ne dépend pas de la variable temporelle t sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, la famille de solutions est réduite à :

$$\gamma J_n \left(\sqrt{-\frac{i\omega n}{D}} r \right) \exp(in\theta) \quad (5.11)$$

$T_1(r, \theta, k)$ est solution de (5.1) avec de nouvelles conditions aux limites, qui cette fois, sont complètes et donc bien définies :

$$\begin{cases} (r, \theta, k) \in \mathcal{D}_1 \times \mathbb{N}^* \\ T_1(r_m, \theta, k) = T^m(\theta, k) \text{ (conditions aux limites)} \end{cases} \quad (5.12)$$

Pour chaque tour, les températures mesurées $T^m(\theta, k)$ sont développées en série de Fourier :

$$T^m(\theta, k) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \hat{T}_n^k \exp(in\theta) \quad (5.13)$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\hat{T}_n^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T^m(\theta, k) \exp(-in\theta) d\theta \quad (5.14)$$

Les coefficients (5.14) se calculent rapidement par fft comme dans le chapitre précédent. Cependant (particulièrement pour les premiers cycles), pendant la durée du tour la température augmente légèrement (de quelques degrés). A la fin du tour la température mesurée est légèrement supérieure à celle en début de tour, bien que celle-ci corresponde à la même position angulaire. Donc la température mesurée $T^m(\theta, k)$ n'est pas exactement 2π

6. Pour cela il suffirait par exemple si l'on considère dix tours de laminage de construire, pour chaque position angulaire, une fonction temporelle reliant la température à cette position angulaire pour chacun des dix tours

périodique. La discontinuité entre la température en début et en fin de tour crée un effet Gibbs (oscillations près de la discontinuité dont l'amplitude ne tend pas vers zéro). Cet effet bien connu peut être réduit assez efficacement en appliquant un filtre. Lanczos (1961) et Acton (1990) ont proposé de multiplier par un sinus cardinal dans le développement :

$$T^m(\theta, k) \simeq \sum_{n=-N_1}^{N_1} \text{sinc}^g\left(\frac{n}{N_1}\right) \hat{T}_n^k \exp(in\theta) \quad (5.15)$$

où g est l'ordre du filtre (nous prendrons 1 ou 0) et $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Les oscillations restantes malgré ce filtre sont tout simplement coupées du signal final (nous coupons le signal en début et fin de tour).

Pour chaque tour, la fonction suivante (5.16) est solution de (5.1) (sous forme de (5.6)) et coïncide avec la température mesurée au rayon r_m (c'est-à-dire vérifiant la condition aux limites (5.12)).

$$T_1(r, \theta, k) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \text{sinc}^g\left(\frac{n}{N_1}\right) \hat{T}_n^k \frac{J_n(\zeta_n r)}{J_n(\zeta_n r_m)} \exp(in\theta) \quad (5.16)$$

où N_1 est un entier $\zeta_n = \sqrt{-i\omega n/D} = (1-i)\sqrt{\omega n/2D}$. Nous retrouvons exactement la solution du régime permanent, mais actualisée à chaque tour. L'écriture $T = T_1 + T_2$ peut donc se comprendre, comme une solution stationnaire (actualisée à chaque tour) et un terme de dérive (ou transitoire).

5.7. Effet de bord et épaisseur de peau

Les coefficients $J_n(\zeta_n r)/J_n(\zeta_n r_m)$ peuvent être vus comme des facteurs d'amplification. Ainsi, la solution (5.16) peut être comprise comme un filtre des températures mesurées, de manière similaire à l'interprétation de Blum and Marquardt (1997). Figure 5.4, les coefficients $|J_n(\zeta_n r)/J_n(\zeta_n r_m)|$ sont représentés en fonction de r pour les premières valeurs de n . Les paramètres sont fixés pour des conditions de laminages très communes. Le rayon du cylindre est $R_s = 254$ mm, et la vitesse de rotation est $\omega = 4\pi$ rad/s. L'interprétation en filtre passe-bas est manifeste, plus la température est évaluée loin de la surface et plus les hautes fréquences sont atténuées. De la même manière que le caractère mal posé des méthodes inverses s'exprime, pour la solution du chapitre précédent, par le fait qu'une erreur faite dans le calcul d'intégrale est multipliée par un coefficient en $(R_s/r_m)^n$, la solution inverse thermique est également mal posée et cela s'exprime par le fait qu'une petite erreur dans le calcul d'intégrale est amplifiée par un facteur $J_n(\zeta_n R_s)/J_n(\zeta_n r_m)$.

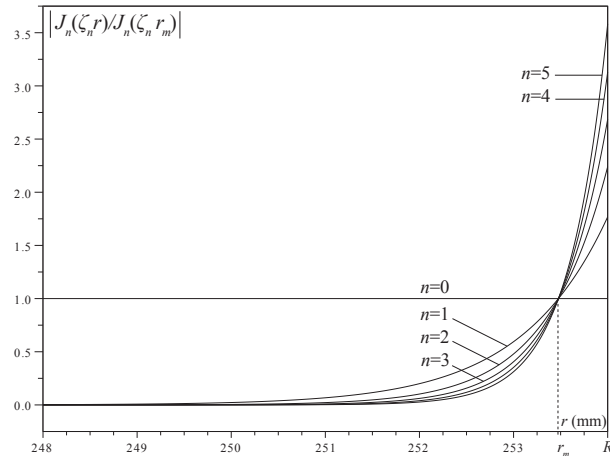


FIGURE 5.4 – $|J_n(\zeta_n r)/J_n(\zeta_n r_m)|$ vs r pour quelques valeurs de n

Il est très intéressant de constater, que les méthodes inverses thermiques sont donc beaucoup moins mal posées que les méthodes inverses élastiques, car le facteur d'amplification diverge beaucoup plus lentement quand n augmente. Par ailleurs, un effet de bord très net est démontré à la figure 5.4, et cela correspond très bien à l'épaisseur

de peau au-delà de laquelle la chaleur n'entre pas, comme le cas très classique d'une plaque semi-infinie subissant un chargement thermique cyclique.

Le rayon de mesure r_m est choisi de telle manière que le signal soit mesuré dans l'épaisseur de peau. Ce choix dépend de la vitesse de rotation, plus le cylindre tourne vite, plus il faut mesurer près de la surface, car l'épaisseur de peau est d'autant plus réduite. La valeur de 0.5 mm de profondeur convient à la plupart des situations de laminage. Cela paraît extrêmement faible, mais il est en fait possible d'insérer les thermocouples à ce genre de profondeurs comme nous le verrons au chapitre 6.

5.8. Condition initiale

T_1 ne vérifie pas la condition initiale requise par (5.4) et (5.5). Une solution correctrice T_2 est donc nécessaire. T_2 doit vérifier la condition initiale d'une part (à laquelle on soustrait le champ de température initial introduit par la solution T_1) et doit s'annuler au rayon r_m d'autre part. Ainsi nous introduisons les racines $x_{n,p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) des fonctions de Bessel d'ordre n de première espèce et classées par ordre croissant. Nous pouvons chercher une solution qui s'annule automatiquement en r_m :

$$T_2(r, t, k) = \sum_{n=-N_0}^{N_0} \sum_{p=1}^{N_2} \gamma_{n,p,k} J_n \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right) \exp \left(-\frac{t-t_k}{\tau_{n,p}} \right) \exp(in\theta) \quad (5.17)$$

où N_0 et N_2 sont des entiers et $\gamma_{n,p,k}$ sont des nombres complexes. Nous avons pris $t - t_k$ (ce qui est licite) pour avoir une condition initiale en t_k plus simple. Par ailleurs :

$$\tau_{n,p} = \frac{1}{D} \left(\frac{x_{n,p}^2}{r_m^2} + \frac{i\omega n}{D} \right)^{-1} \quad (5.18)$$

Pour le premier tour, la condition initiale est la température ambiante à laquelle on soustrait la température $T_1(r, \theta, k)$. Pour les tours suivants, la condition initiale est le champ de température à la fin du tour précédent auquel on soustrait la température $T_1(r, \theta, k)$. La condition initiale de (5.4) et (5.5) peut être écrite comme suit (en rappelant que $t_1 = 0$ et que t_k est le temps au début du tour d'indice k ou à la fin du tour d'indice $k-1$) :

$$\sum_{p=1}^{N_2} \gamma_{n,p,k} J_n \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right) = u_{n,k}(r) \quad (5.19)$$

où nous avons, en considérant le développement de T_1 (5.16) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{0,k}(r) = T_a - \hat{T}_0^k & k = 1 \\ u_{n,k}(r) = -\text{sinc}^g \left(\frac{n}{N_1} \right) \hat{T}_n^k \frac{J_n(\zeta_n r)}{J_n(\zeta_n r_m)} & k = 1 \\ u_{n,k}(r) = \sum_{p=1}^{N_2} \gamma_{n,p,k-1} J_n \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right) \exp \left(-\frac{t_k - t_{k-1}}{\tau_{n,p}} \right) & k \geq 2 \\ \quad + \text{sinc}^g \left(\frac{n}{N_1} \right) \left(\hat{T}_n^{k-1} - \hat{T}_n^k \right) \frac{J_n(\zeta_n r)}{J_n(\zeta_n r_m)} & \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Il est remarquable qu'au tour d'indice k , $u_{n,k}(r)$ soit une fonction de la variable r connue sur tout le domaine de variation de r (c'est-à-dire $[0, R_s]$). Les coefficients $\gamma_{n,p,k}$ sont donnés par (5.21) sous une forme analytique (appelée développement de Fourier-Bessel et introduite au chapitre 2) utilisée par Sneddon (1966, p.37) et démontrée par Watson (1944, pp.591-594).

$$\gamma_{n,p,k} = \frac{2}{r_m^2 J_{n+1}^2(x_{n,p})} \int_0^{r_m} \rho u_{n,k}(\rho) J_n \left(x_{n,p} \frac{\rho}{r_m} \right) d\rho \quad (5.21)$$

En utilisant le résultat bien connu (5.22), donné parmi beaucoup d'auteurs par Sneddon (1966, p.27) et considérant le résultat (5.23) donné par Gradshteyn and Ryzhik (1992) l'expression de $\gamma_{n,p,k}$ devient (5.24).

$$\int_0^{r_m} \rho J_0(x\rho) d\rho = r_m \frac{J_1(r_m x)}{x} \quad (5.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{r_m} \rho J_n(x\rho) J_n(y\rho) d\rho = r_m \frac{x J_{n+1}(r_m x) J_n(r_m y) - y J_{n+1}(r_m y) J_n(r_m x)}{x^2 - y^2} \\ \int_0^{r_m} \rho J_n(x\rho)^2 d\rho = \frac{r_m^2}{2} (J_n(r_m x)^2 - J_{n-1}(r_m x) J_{n+1}(r_m x)) \end{array} \right. \quad (5.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma_{0,p,k} = \frac{2}{J_1(x_{0,p})} \frac{T_a - \hat{T}_0^k}{x_{0,p}} & k = 1 \\ \gamma_{n,p,k} = \frac{2}{J_{n+1}(x_{n,p})} \frac{\text{sinc}^g(n/N_1) \hat{T}_n^k}{r_m^2 \zeta_n^2 x_{n,p}^{-1} - x_{n,p}} & k = 1 \\ \gamma_{n,p,k} = -\gamma_{n,p,k-1} \frac{J_{n-1}(x_{n,p})}{J_{n+1}(x_{n,p})} \exp\left(-\frac{t_k - t_{k-1}}{\tau_{n,p}}\right) & k \geq 2 \\ \quad + \frac{2}{J_{n+1}(x_{n,p})} \frac{\text{sinc}^g(n/N_1) (\hat{T}_n^k - \hat{T}_n^{k-1})}{r_m^2 \zeta_n^2 x_{n,p}^{-1} - x_{n,p}} & \end{array} \right. \quad (5.24)$$

Dans la pratique, les termes tels que $n \geq 1$ sont assez négligeables pour $T_2(r, \theta, t, k)$. Fondamentalement, cela est dû au fait que le champ T_2 correspond aux dynamiques lentes du champ de température, qui est quasiment isotrope sous l'épaisseur de peau. Ainsi nous obtenons la simplification suivante (les deux solutions avec et sans simplification donne les mêmes résultats dans les cas que nous avons considérés) :

$$T_2(r, \theta, t, k) = \sum_{p=1}^{N_2} \gamma_{0,p,k} J_0\left(x_{n,p} \frac{r}{r_m}\right) \exp\left(-x_{0,p}^2 \frac{Dt}{r_m^2}\right) \quad (5.25)$$

5.9. Commentaire

Si une longue bande est laminée sans interruption, nous pouvons considérer que la température mesurée au rayon r_m du tour courant (d'indice k) est proche de la température mesurée pour n'importe quel tour précédent du fait que l'évolution de la carte de température soit lente. Dans ce cas, l'hypothèse que nous avons faite (discutée à la section 5.6.2), n'est pas seulement vérifiée pour chaque tour considéré indépendamment des autres, mais pour tous les tours considérés ensembles. Il n'est donc pas nécessaire de redéfinir la condition initiale à chaque tour. Dans ce cas, seuls les $\gamma_{n,p,1}$ sont calculés et sont utilisés pour tous les tours suivants (évidemment de ce fait nous ne considérons plus $t - t_k$ mais uniquement t dans la solution T_2). Donc, chaque tour peut être calculé sans calculer tous les tours précédents. Cette technique est utilisée dans les simulations présentées à la section 5.10, où le premier tour et le tour après 10 minutes de laminage sont calculés. En fait il faut reprendre une nouvelle condition initiale, comme nous l'avons proposé, uniquement lorsqu'il y a un changement important des conditions de laminage, (fin d'une bande pour une nouvelle bande etc...), parce que dans ce cas le régime pseudo-permanent est rompu.

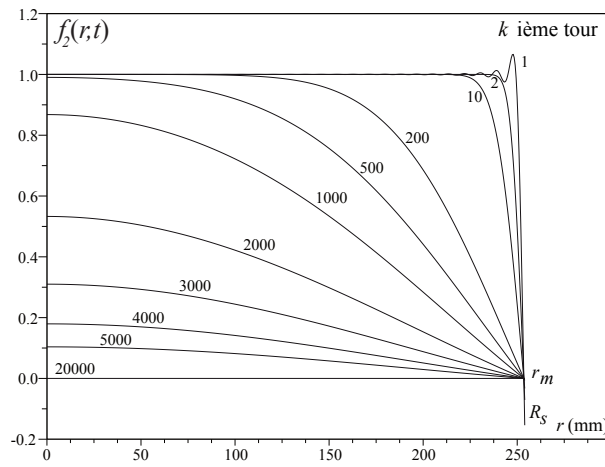
Pour se rendre compte de l'évolution du champ T_2 et de son influence sur la solution globale, nous posons dans le cadre de la simplification (5.8) une fonction normalisée f_2 donnée par (5.26), qui est une sorte de fonction de forme pour T_2 .

$$f_2(r, t) = \sum_{p=1}^{N_2} \beta_{0,p} J_0\left(x_{0,p} \frac{r}{r_m}\right) \exp\left(-x_{0,p}^2 \frac{Dt}{r_m^2}\right) \quad (5.26)$$

où les coefficients $\beta_{0,p} = \gamma_{0,p,k} / (T_a - \hat{T}_0^k) = 2 / (J_1(x_{0,p}) x_{0,p})$ sont listés dans le tableau 5.2. A la figure 5.5 le graphe de la fonction f_2 est présenté pour des tours successifs de 1 à 20000 (ce qui revient à environ 2 heures et 30 minutes), considérant que les paramètres de laminage ont été fixés à $R_s = 254$ mm, $r_m = 253.5$ mm, $\omega = 4\pi$ rad/s et $D = 13.67$ mm²/s. L'influence de la solution T_2 est négligeable quand la fonction f_2 tend vers zéro. Puisque la solution T_1 est exactement la solution du problème stationnaire (réactualisé à chaque tour) dès que T_2 est négligeable la solution T atteint un régime pseudo-stationnaire. Il apparaît que le temps nécessaire pour atteindre ce régime est très rapide près de la peau, et très long à coeur du cylindre (2h30).

TABLE 5.2 – $\beta_{0,p}$

p	$\beta_{0,p}$	p	$\beta_{0,p}$	p	$\beta_{0,p}$	p	$\beta_{0,p}$	p	$\beta_{0,p}$	p	$\beta_{0,p}$
1	1.6017603	11	0.4198340	21	0.2792925	31	0.1973955	41	0.1303318	51	0.0651469
2	-1.0640481	12	-0.3994332	22	-0.2697257	32	-0.1903252	42	-0.1238687	52	-0.0584356
3	0.8499229	13	0.3812070	23	0.2605739	33	0.1833701	43	0.1174123	53	0.0516561
4	-0.7272953	14	-0.3647408	24	-0.2517861	34	-0.1765158	44	-0.1109563	54	-0.0448147
5	0.6451733	15	0.3497198	25	0.2433180	35	0.1697488	45	0.1044914	55	0.0378854
6	-0.5850795	16	-0.3359009	26	-0.2351319	36	-0.1630565	46	-0.0980124	56	-0.0308898
7	0.5385006	17	0.3230924	27	0.2271942	37	0.1564265	47	0.0915102	57	0.0237728
8	-0.5009022	18	-0.3111410	28	-0.2194761	38	-0.1498492	48	-0.0849808	58	-0.0166182
9	0.4696192	19	0.2999224	29	0.2119517	39	0.1433137	49	0.0784137	59	0.0091932
10	-0.4429698	20	-0.2893344	30	-0.2045984	40	-0.1368109	50	-0.0718065	60	-0.0026463

FIGURE 5.5 – f_2 vs r de 1 à 20000 tours

5.10. Validation de la solution

5.10.1. Champ de température direct et analytique

La précision de la méthode inverse et sa robustesse au bruit de mesure sont démontrées comme suit (de manière analogue au chapitre précédent). Un champ de température analytique dépendant du temps (solution de (5.1)) est prescrit au cylindre et noté $T^p(r, \theta, t)$, p signifiant prescrit. Donc à la surface du cylindre de travail la température est $T^p(R_s, \theta, t)$ et le flux radial vaut $H^p(R_s, \theta, t) = \lambda(\partial T^p / \partial r)(R_s, \theta, t)$. Ensuite la température au rayon interne de mesure r_m est extraite du champ de température prescrit. Ces valeurs constituent les entrées du calcul inverse (remplaçant les mesures). Ces températures sont considérées pour des temps successifs (notés $t_\theta^k = t_k + \theta/\omega$) en cohérence avec la vitesse de rotation du cylindre et de l'indice du tour k considéré. Nous avons donc $T^m(\theta, k) = T^p(r_m, \theta, t_\theta^k)$. Les sorties du calcul sont la température et le flux radial en surface. Celles-ci sont comparées au champ de température (ou au flux) analytique prescrit évalué en R_s . L'erreur de reconstruction ϵ donnée par (5.27) ou (5.28) est utilisée comme un pourcentage pour évaluer la qualité de la méthode.

$$\epsilon = 100 \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi} [T^s(\theta, t_\theta^k, k) - T^p(R_s, \theta, t_\theta^k)]^2 d\theta}{\int_0^{2\pi} [T^p(R_s, \theta, t_\theta^k)]^2 d\theta}} \quad (5.27)$$

$$\epsilon = 100 \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi} [H^s(\theta, t_\theta^k, k) - H^p(R_s, \theta, t_\theta^k)]^2 d\theta}{\int_0^{2\pi} [H^p(R_s, \theta, t_\theta^k)]^2 d\theta}} \quad (5.28)$$

Nous prenons pour champ de température prescrit (que nous établissons dans l'annexe A) :

$$T^p(r, \theta, t) = 2\text{Re} \left[\sum_{n=0}^{N_3} \sum_{q=1}^{N_4} a_{n,q} J_n \left(\frac{y_{n,q} r}{R_s} \right) \exp \left(-\frac{D y_{n,q}^2 t}{R_s^2} \right) \exp(in(\theta - \omega t)) \right] + 2\text{Re} \left[\sum_{n=0}^{N_3} b_n J_n(\zeta_n r) \exp(in\theta) \right] \quad (5.29)$$

où $y_{n,q}$ sont les racines successives et positives de la fonction $h_n(y) = \lambda(y/R_s)J'_n(y) + \text{HTC} \times J_n(y)$ et $a_{n,q}$ et b_n sont des nombres complexes et N_3 et N_4 sont des entiers. Le flux radial correspondant est :

$$H^p(r, \theta, t) = 2\lambda \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{N_3} \sum_{q=1}^{N_4} \frac{a_{n,q} y_{n,q}}{R_s} J'_n \left(\frac{y_{n,q} r}{R_s} \right) \exp \left(-\frac{D y_{n,q}^2 t}{R_s^2} \right) \exp(in(\theta - \omega t)) \right] + 2\lambda \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{N_3} b_n \zeta_n J'_n(\zeta_n r) \exp(in\theta) \right] \quad (5.30)$$

Le champ de température $T^p(r, \theta, t)$ donné par (5.29) est sous la forme de (5.6) et est donc une solution exacte de l'équation de la chaleur non stationnaire (5.1). Les coefficients $a_{n,q}$ et b_n peuvent être choisis de telle sorte que le champ de température $T^p(r, \theta, t)$ corresponde à un cylindre avec une température environnante T_a partout sauf dans un petit secteur angulaire $[\pi - \Theta, \pi + \Theta]$ où la température environnante est T_{ext} (simulant un contact tôle/cylindre). Le flux de chaleur entrant dans le cylindre est classiquement défini par un coefficient de transfert thermique HTC. Un HTC uniforme a été utilisé par simplicité ($\text{HTC} = 7 \times 10^{-4} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$). Cette valeur correspond au contact entre le produit et l'outil (acier/acier) mais demeure physiquement absurde pour le reste du cylindre (air/acier ou eau+huile/acier). Ces conditions sont donc très simples par rapport à une véritable simulation de laminage, mais le but est simplement de tester la méthode et sa robustesse au bruit, nous nous donnons simplement des signaux suffisamment sévères. Ainsi en ajustant les valeurs de Θ , T_{ext} et HTC nous obtenons de forts gradients et les pics de température classiquement obtenus par des simulations numériques beaucoup plus abouties, telles que celles citées en introduction. Les détails concernant le calcul de $a_{n,q}$ et b_n sont reportés en annexe A. Les paramètres du problème sont listés dans le tableau 5.3. La vitesse de rotation est fixée à 8π (rad/s) ou 6.4 m/s en considérant le rayon du cylindre, ce qui correspond à des vitesses de laminage assez élevées.

TABLE 5.3 – Paramètres

N_0, N_1	(-)	50	λ	(W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	52
N_2	(-)	60	ω	(rad/s)	8π
N_3	(-)	100	f	(Hz)	1000
N_4	(-)	200	T_a	(K)	293.15
R_s	(m)	0.254	T_{ext}	(K)	1273.15
r_m	(m)	0.2535	HTC	(W.m ⁻² .K ⁻¹)	7×10^4
D	(m ² /s)	6×10^{-6}	Θ	(rad)	$\pi/10$

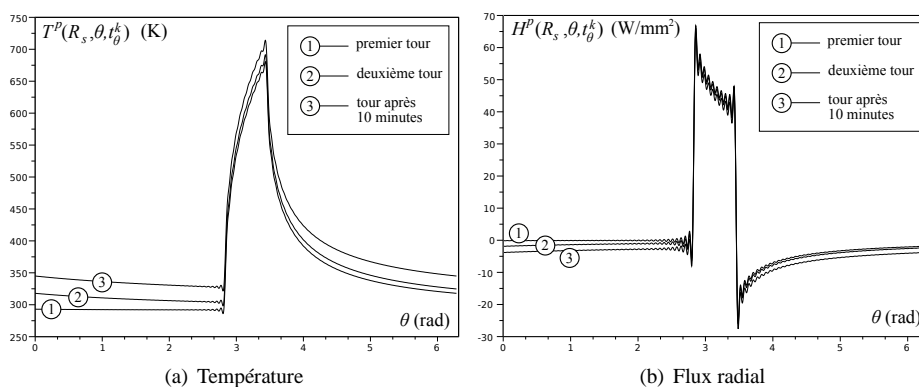
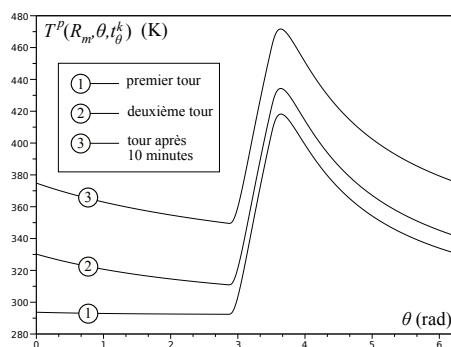
5.10.2. Reconstruction sans bruit

Utilisant la température prescrite (5.29), le signal d'entrée est produit pour trois tours différents : le premier, le second et un tour après 10 minutes de laminage ininterrompu. La température prescrite à la surface, et son flux radial correspondant, sont présentés figure 5.6, et la température au rayon interne r_m (remplaçant les mesures) est présentée figure 5.7. La reconstruction de la température en surface et du flux radial, constitue les sorties du calcul, qui sont donc comparées à la température prescrite en surface et au flux correspondant, figure 5.8. Les erreurs quantifiées de reconstruction sont listées dans le tableau 5.4. Bien que l'hypothèse (discutée à la section 5.6.2) que la carte des températures n'évolue que très peu au cours du tour, ne soit pas parfaitement vérifiée pour les premiers tours de laminage (du fait de l'augmentation de la température entre le début et la fin du tour), il est

manifeste que cela n'a que très peu d'influence sur la qualité de la reconstruction, qui même pour les premiers tours est très correcte. Par ailleurs le niveau de reconstruction du flux radial à la surface est sensiblement moins bon si l'on s'en tient à l'erreur quantifiés du tableau 5.4. Cela est dû aux singularités du signal en entrée et sortie d'emprise, en revanche le reste du signal est très bien reconstruit.

TABLE 5.4 – Erreur quantifiée, ϵ

	Température		Flux radial	
	Sans bruit	Avec bruit	Sans bruit	Avec bruit
Premier tour	1.30% (Fig.5.8(a))	1.39% (Fig.5.9(a))	18.45% (Fig.5.8(a))	19.5% (Fig.5.9(b))
Deuxième tour	1.24% (Fig.5.8(c))	1.29% (Fig.5.9(d))	18.5% (Fig.5.8(c))	19.23% (Fig.5.9(d))
Tour après 10 minutes	0.7% (Fig.5.8(e))	1.25% (Fig.5.9(f))	13.4% (Fig.5.8(e))	19.9% (Fig.5.9(f))

FIGURE 5.6 – Données prescrites au rayon R_s vs θ FIGURE 5.7 – Données d'entrée au rayon r_m vs θ

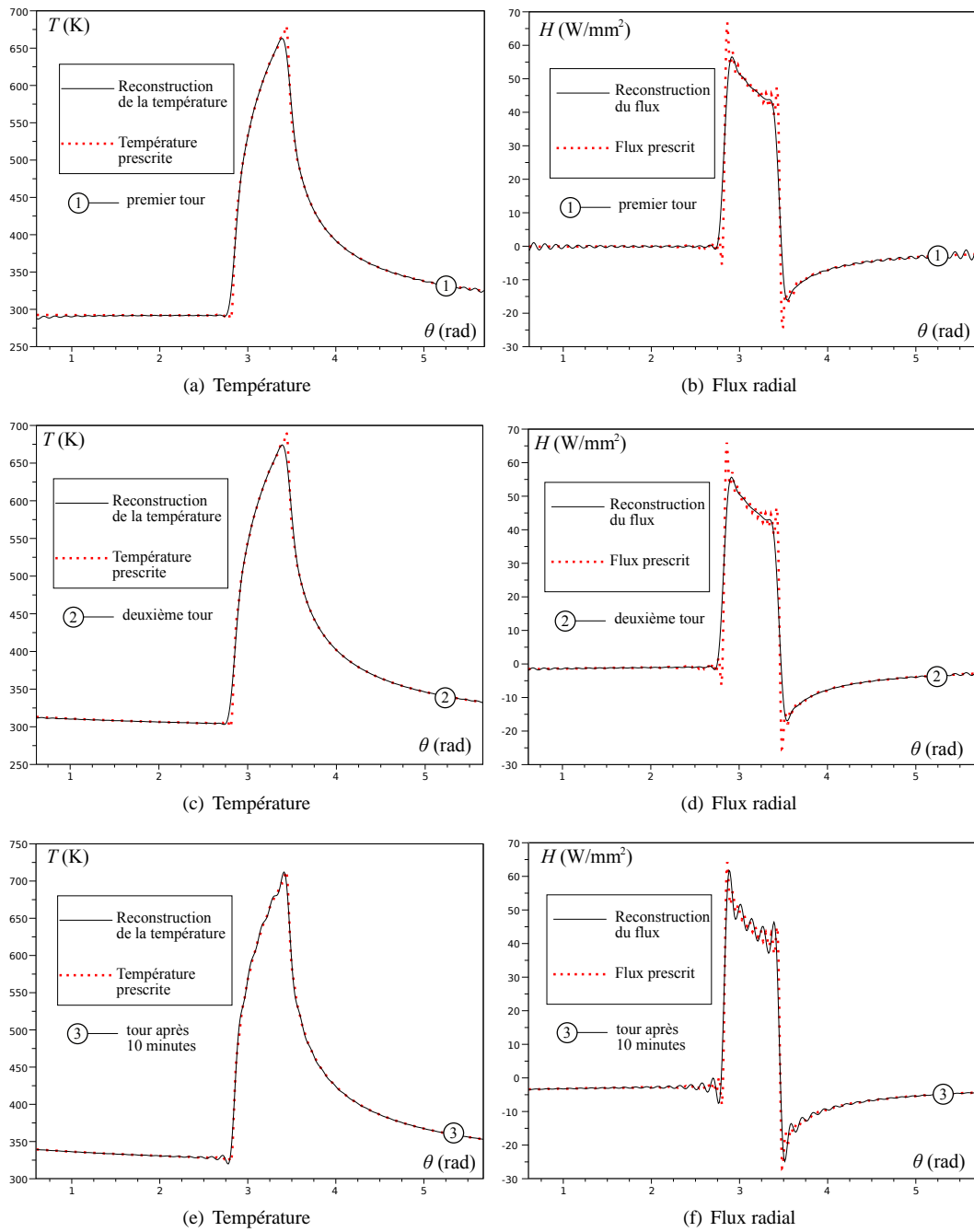


FIGURE 5.8 – Reconstruction en surface sans bruit

En outre, pour le premier et le second tour nous prenons $g = 1$ car il y a une discontinuité de température entre le début et la fin du tour assez importante. Ainsi nous devons filtrer l'effet Gibbs. Pour le tour après 10 minutes de laminage nous prenons évidemment $g = 0$, car il n'y a plus de discontinuité et donc plus d'effet Gibbs.

5.10.3. Robustesse au bruit de mesure

En pratique les mesures sont bruitées. Nous nous sommes donnés pour cette première validation un cas théorique, correspondant à des conditions de laminage à chaud très favorables, ainsi la méthode est extrêmement

robuste au bruit. En effet, nous considérons un bruit blanc (sur toutes les fréquences) en ajoutant des nombres aléatoires (de loi uniforme et d'amplitude 1 K) au signal d'entrée. Puis, la reconstruction est calculée comme à la section 5.10.2. Dans ces conditions il est clair que le bruit ne compromet pas la méthode inverse développée dans ce chapitre.

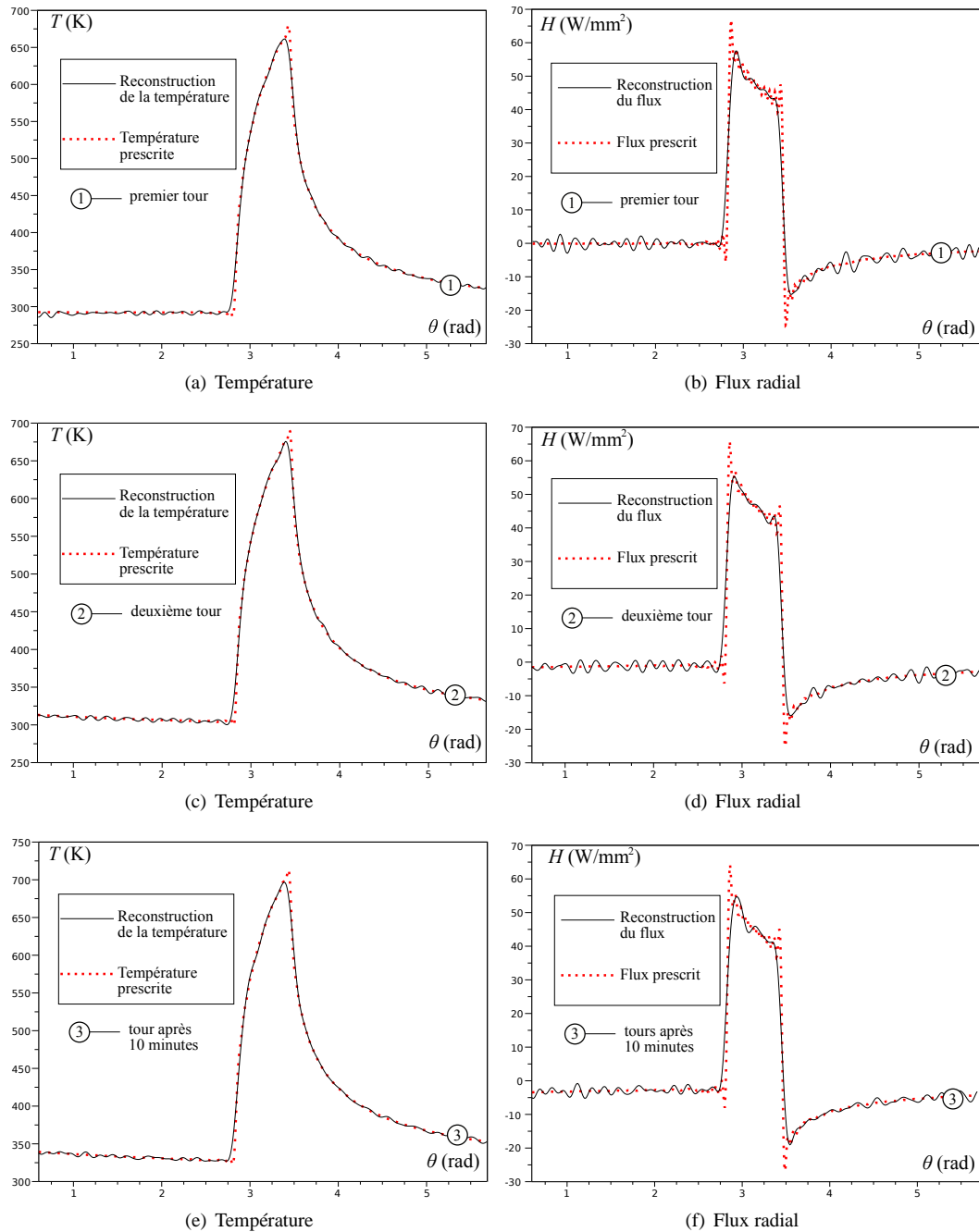


FIGURE 5.9 – Reconstruction en surface avec bruit

Comme nous l'avons précisé au chapitre précédent, nous n'effectuons pas d'étude systématique sur l'ordre de troncature optimal à considérer en fonction du signal d'entrée. Nous avons proposé une loi empirique dans le cas de la méthode inverse élastique. Dans le présent chapitre, nous avons considéré le graphe des coefficients

de Fourier du signal à reconstruire, ceux-ci divergent à partir d'un certain indice de sommation (du fait qu'une erreur dans l'intégrale du signal d'entrée est multipliée par un facteur d'amplification que nous avons discuté à la section 5.7). Nous avons choisi à la main le nombre de troncature avant que ces coefficients ne divergent. Nous pourrions imaginer un script balayant ces coefficients et coupant automatiquement, avant que le signal ne diverge. Cependant ce script n'a pas été écrit, ni pour la méthode inverse élastique du précédent chapitre ni pour la méthode inverse thermique que nous développons ici. Par la suite (couplage thermoélastique du chapitre 7) les sommes sont toujours tronquées à la main, mais en gardant à l'esprit qu'un code doit pouvoir automatiser ce choix. Les signaux reconstruits en surface (en considérant un bruit blanc) sont comparés à la température et au flux radial prescrits. Cette comparaison est présentée figure 5.9. L'erreur de reconstruction quantifiée est listée dans chaque cas dans le tableau 5.4. La reconstruction est satisfaisante même sous l'hypothèse qu'un bruit blanc perturbe l'ensemble des fréquences du signal mesuré. Le passage au flux se fait en prenant le gradient des températures, ainsi le flux de chaleur est légèrement plus sensible au bruit que la température (du fait de la dérivation).

5.10.4. Calibrage

La position du capteur n'a pas de sens précis, dans la mesure où le thermocouple lui-même a une certaine dimension et est constitué de plusieurs matériaux dont les propriétés thermiques sont légèrement différentes les unes des autres (nous le verrons dans le chapitre expérimental 6). Dans cette méthode inverse, nous ne modélisons pas le thermocouple, nous considérons que les mesures sont faites en un point théorique du cylindre et que les propriétés thermiques sont homogènes et indépendantes de la température. Il faut donc effectuer un calibrage avec des conditions aux limites bien connues, et analyser le signal donné par le thermocouple, pour évaluer une position théorique équivalente du système de mesure et les paramètres thermiques constants du problème. Il suffit pour cela de minimiser l'écart (au sens des moindres carrés par exemple) entre le signal mesuré effectivement par le thermocouple et la température calculée à partir des conditions bien connues, que nous avons fixée autour du cylindre. Cette minimisation porte sur la position équivalente du point de mesure d'une part et sur les paramètres matériaux équivalents d'autre part. Nous détaillerons la procédure de calibrage dans le chapitre 6.

Nous présentons simplement ici le niveau de sensibilité de la méthode à une erreur de 10% dans le calibrage sur la position (profondeur) équivalente ponctuelle du capteur. Cette étude permet d'avoir un bon niveau de confiance dans la méthode, car elle n'est pas très sensible à ce type d'erreur, ce qui aurait été assez gênant dans le cas contraire. Nous considérons une erreur sur r_m notée $\pm e$, avec $e = 0.025$ mm sachant que la valeur calibrée devrait être 0.5 mm. Les températures d'entrée de la méthode sont présentées figure 5.10. La température et le flux radial reconstruits pour le premier tour sont présentés figure 5.11, et l'erreur quantifiée de reconstruction est listée dans le tableau 5.5.

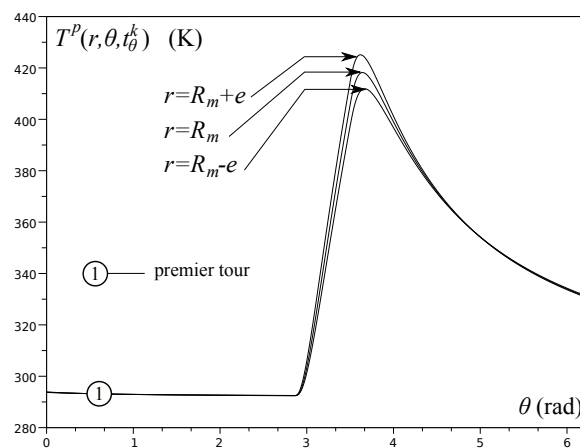


FIGURE 5.10 – Température d'entrée à différentes profondeurs

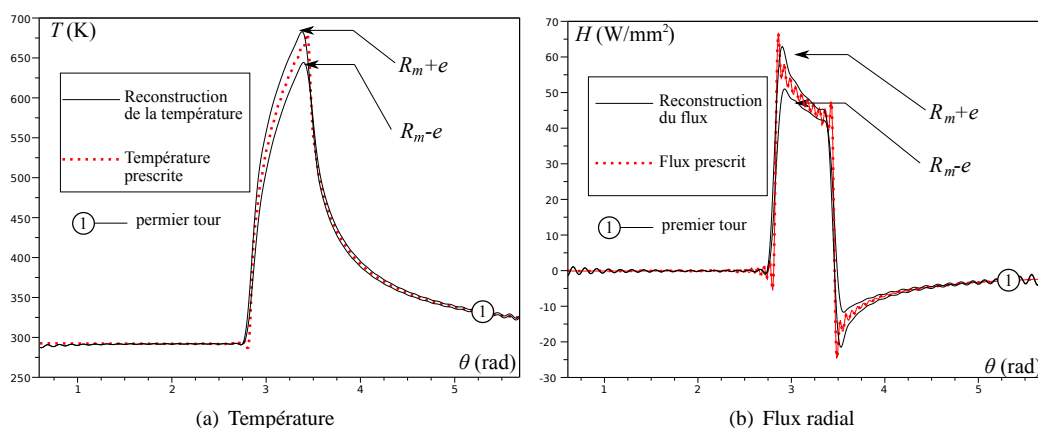


FIGURE 5.11 – Reconstruction en surface pour différentes profondeurs

TABLE 5.5 – Erreur de reconstruction à différentes profondeurs (1er tour)

Rayon	Température	Flux radial
r_m	1.3%	18.45%
$r_m - e$	2.5%	21.9%
$r_m + e$	2.5%	20.22%

5.11. Comparaison avec une méthode numérique

Comme nous l'avons précisé dans l'étude bibliographique de ce chapitre, quelques méthodes inverses thermiques numériques existent. Parmi elles, nous pouvons mentionner ce que nous avons appelé l'algorithme N dérivé du travail de Kotrbacek et al. (2006). Cette méthode numérique est exhaustive dans la mesure où le cylindre est modélisé ainsi que le thermocouple comprenant le filament, sa gaine protectrice et l'isolation électrique, chacun de ces composants ayant ses propres caractéristiques thermiques dépendant de la température. En comparaison avec cette approche, la méthode que nous avons développée peut paraître extrêmement frustrée. Cependant les qualités de reconstruction sont peu dépendantes des détails de modélisation, si le calibrage est correctement opéré. Pour comparer les performances des deux méthodes inverses (algorithme N et la présente méthode), nous utilisons un cas de simulation numérique de laminage industriel beaucoup plus sévère que les signaux que nous avons traités précédemment à la section 5.10. La simulation est faite par différences finies en imposant des conditions de flux à la surface du cylindre (forte chauffe dans l'emprise, et différents types de refroidissement sur le reste du cylindre). Nous extrayons un tour après plusieurs minutes de laminage. La température calculée au rayon interne r_m est présentée figure 5.12(a). La température calculée en surface au rayon du cylindre R_s ainsi que la reconstruction de la température de surface pour les deux méthodes inverses sont présentées figure 5.12(b). Il apparaît clairement que l'algorithme N (numérique) n'est pas concluant pour des cas de laminage sévères du type industriel, cela est principalement dû au fait que le problème est mal posé et que la méthode numérique, pour être stabilisée, doit être fortement régularisée. Par ailleurs, nous montrons que la présente méthode inverse analytique offre de bonnes possibilités, même avec des signaux singuliers. Cela est donc encourageant pour le développement de cette méthode, de sorte qu'elle soit utilisée directement sur les laminaires d'usine. Comme nous l'avons précisé plus haut, la méthode est très robuste au bruit de mesure. Ainsi, même un bruit blanc altérant toutes les fréquences (figure 5.12(c)) ne compromet pas la précision comme le montre la figure 5.12(d) (qui est obtenue à partir de données bruitées au rayon r_m avec une amplitude de 1 K). Par ailleurs si l'on considère que le bruit altère principalement les hautes fréquences et que le bruit blanc est très léger, comme c'est le plus souvent le cas expérimentalement (c'est le type de bruit que nous avons considéré au chapitre précédent), et si nous filtrons les hautes fréquences du

signal d'entrée, alors la reconstruction est très proche de celle obtenue figure 5.12(b) (reconstructions similaires, il serait inutile de reproduire une autre figure).

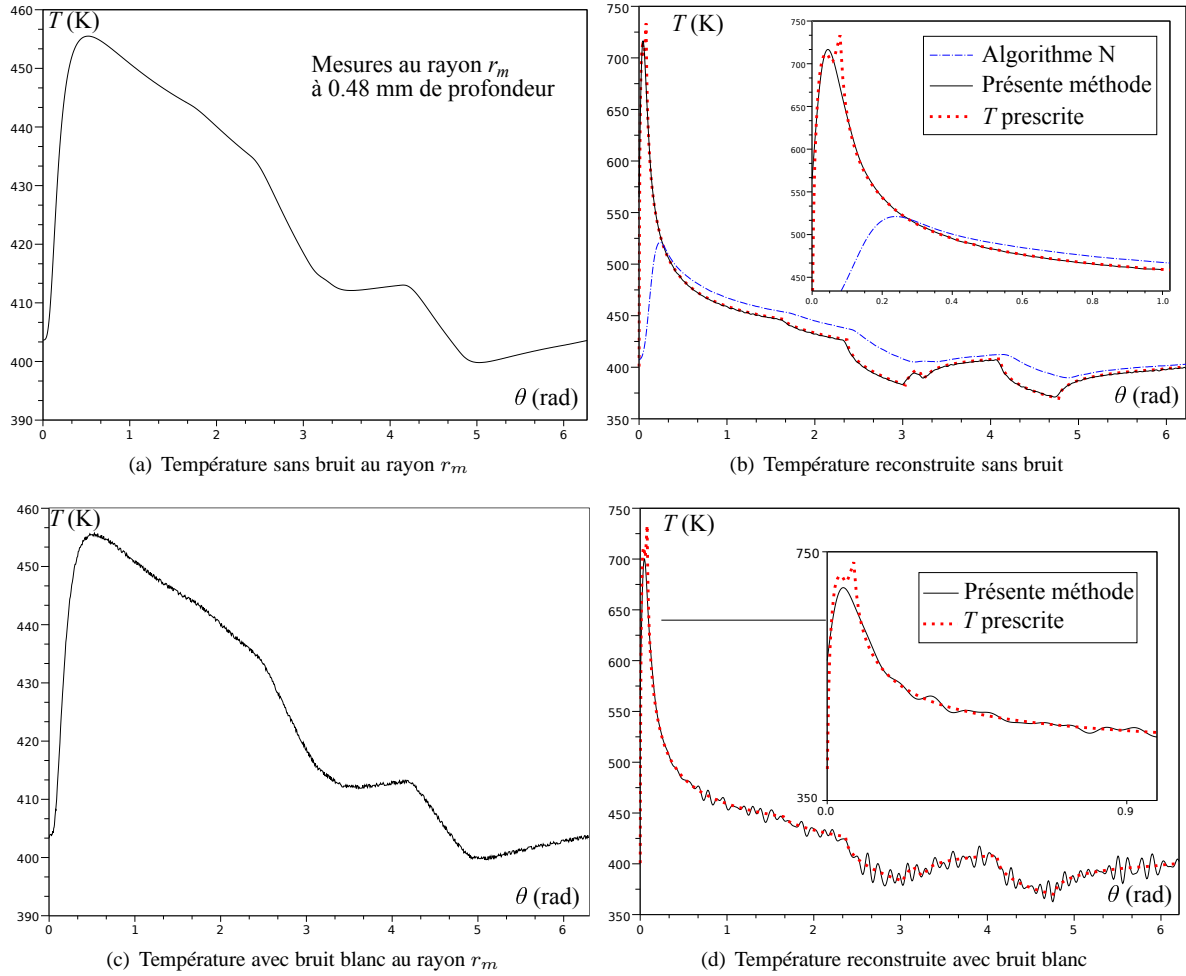


FIGURE 5.12 – Comparaison sur conditions sévères

5.12. Temps de calcul

Sans rentrer dans trop de détails de programmation, l'idée est la même que dans le chapitre précédent, c'est-à-dire calculer la solution (5.7) ou la version simplifiée (5.8) grâce à des matrices (ou tenseurs d'ordres plus élevés représentés par des hypermatrices), qui sont pré-calculées et stockées dans une bibliothèque. Par exemple, les coefficients $\gamma_{n,p,k}$ (5.21) sont pré-calculés sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta_{0,p} = \frac{2}{J_1(x_{0,p})} \frac{1}{x_{0,p}} & k = 1 \\ \beta_{n,p} = \frac{2}{J_{n+1}(x_{n,p})} \frac{\text{sinc}^g(n/N_1)}{r_m^2 \zeta_n^2 x_{n,p}^{-1} - x_{n,p}} & k = 1 \\ \beta_{n,p} = \frac{2}{J_{n+1}(x_{n,p})} \frac{\text{sinc}^g(n/N_1)}{r_m^2 \zeta_n^2 x_{n,p}^{-1} - x_{n,p}} & k \geq 2 \end{array} \right. \quad (5.31)$$

Ainsi les quantités $\gamma_{n,p,k}$ (5.21) s'obtiennent en multipliant $\beta_{n,p}$ par des facteurs dépendant de \hat{T}_n^k . Les seules grandeurs à calculer pendant le procédé sont donc les intégrales \hat{T}_n^k (5.14). De la même manière que dans le

chapitre précédent, ces intégrales sont calculées numériquement grâce à des fft. En utilisant cette approche, le temps de calcul de la méthode est très réduit. Par exemple les résultats présentés à la section 5.10 sont obtenus en environ 0.05 seconde pour chaque tour avec $N_\theta = 1000$ (le nombre de point de reconstruction). Ces temps affichés par Scilab 5.3, sont obtenus pour un processeur quadcore 2.8 GHz.

5.13. Conclusion

La méthode inverse analytique non stationnaire, que nous avons proposée, donne de très bons résultats, tant pour des cas de laminage à chaud avec de fortes épaisseurs (longueur d'emprise importante et signaux peu singuliers), que pour des cas plus industriels avec des épaisseurs plus faibles et des signaux plus singuliers, là où certaines méthodes numériques ne permettent pas de reconstruire de manière satisfaisante les températures en surface. Du fait que la solution est analytique, nous obtenons les flux dans les deux directions (radiale et orthoradiale) en prenant le gradient. Le champ de température est accessible dans tout le cylindre et en particulier à la surface (ainsi que le flux). Un seul thermocouple est suffisant et la fréquence d'acquisition peut aller jusqu'à 10 kHz en général. La méthode présente une très bonne robustesse au bruit de mesure, même pour des bruits altérant toutes les fréquences. La problématique du calibrage a été évoquée, en effet le capteur ayant une dimension et étant composé de plusieurs matériaux différents, nous avons opté pour un matériau équivalent où le capteur est un point sans dimension. Une profondeur équivalente ainsi que des paramètres thermiques équivalents doivent être obtenus par calibrage.

Les temps de calcul obtenus sont très réduits grâce au calcul par fft et à la création de bibliothèques de matrices (et hypermatrices) pré-calculées et stockées. Ainsi pour chaque tour la reconstruction de la température en surface et du flux radial prend 0.05 seconde pour un processeur quadcore 2.8 GHz (temps affiché par Scilab 5.3). La méthode inverse, que nous avons développée, est donc compatible avec une future exploitation des mesures en temps réel pour contrôler les paramètres de laminage pendant le procédé grâce à une boucle d'asservissement.

L'une des principales hypothèses de ce travail est que les paramètres thermiques sont indépendants de la température, ce qui semble être une approche suffisante. Néanmoins, tous les cylindres ne sont pas fabriqués dans les mêmes aciers. Si l'on veut équiper un cylindre de travail dont les propriétés thermiques sont sensibles à la température, il serait peut-être intéressant de développer un calcul avec une diffusivité thermique dépendant linéairement de la température du type $D(T) = D_0(1 + \epsilon_0(T - T_0)/T_0)$ où T_0 est le champ de température que nous aurions si la diffusivité thermique était constante et égale à D_0 et le paramètre ϵ_0 est sans dimension et tel que $\epsilon_0 \ll 1$. Nous pouvons dès lors linéariser l'équation de la chaleur en écrivant la température sous forme $T = T_0 + \epsilon_0 T_1 + \dots + \epsilon_0^j T_1^j + \dots$ et en identifiant les termes en puissances de ϵ_0 . Cette approche a été utilisée pour d'autres types de problèmes par Zhang et al. (2012).

CHAPITRE VI

ÉTUDE THERMIQUE EXPÉRIMENTALE

Ce chapitre est une adaptation de deux articles publiés respectivement dans Advanced Materials Research et Key Engineering Materials (Weisz-Patrault et al. (2012b) et Legrand et al. (2012a)). Ce chapitre vise à démontrer la mise en oeuvre pratique de la méthode inverse analytique thermique du chapitre précédent. Deux types de capteurs de température (le drill et le slot) sont développés et comparés. Des essais ont été menés sur le laminage pilote d'ArcelorMittal de Maizières-les-Metz. Les capteurs de température, la procédure de calibrage et les essais pour différentes conditions de laminage (5 %, 10 %, 15 % et 20 % de réduction d'épaisseur du produit) sont décrits. Il est démontré que le capteur de type slot est plus efficace du point de vue de la qualité des mesures que le capteur drill (mais ce dernier est plus robuste mécaniquement). En outre, le coefficient de transfert thermique moyen HTC varie entre 15 et 26 $\text{kW/m}^2/\text{K}$: plus la réduction du produit est élevée (c'est-à-dire la pression de contact) et plus le HTC l'est aussi. Le coefficient de transfert $HTC_{t/c}$ local n'est pas uniforme dans le contact tôle/cylindre mais semble dépendre de la pression locale de contact. Ce coefficient de transfert non uniforme le long du contact, pourrait contribuer à diminuer le choc thermique (et donc la fatigue thermique) quand le cylindre de travail passe sur l'emprise, par comparaison avec un coefficient de transfert HTC qui serait uniforme dans le contact. D'autre part l'épaisseur d'oxyde (calamine) à la surface du produit tend à diminuer les transferts de chaleur dans l'emprise du produit vers le cylindre. Cela est dû au fait que la calamine conduit beaucoup moins bien la chaleur que l'acier.

6.1. Introduction

En laminage à chaud, les sollicitations thermiques du cylindre de travail sont caractérisées par des chocs thermiques cycliques (pics de températures comme nous l'avons vu au chapitre précédent), qui se font dans l'emprise du fait du contact entre la tôle à environ $\simeq 1000^\circ\text{C}$ et le cylindre entre 50 et 100°C . Ces chargements thermiques cycliques, amplifiés par le refroidissement du cylindre de travail en sortie d'emprise, sont responsables de la dégradation de l'état de surface de l'outil par fatigue thermique, qui écourte fortement sa durée de vie. Une diminution de la fatigue thermique requiert une meilleure connaissance des pics de température et des transferts de chaleur qui existent réellement dans l'emprise et qui sont la source de ces chocs thermiques. Jusqu'à présent les pics de température sont approchés par des coefficients de transfert thermique (HTC : Heat Transfert Coefficient) macroscopiques déterminés par des mesures globales (température de bande supposée uniforme etc...). Cette manière courante d'identification est suffisante pour une première optimisation du système de refroidissement, où la connaissance des transferts de chaleur entre le cylindre et l'extérieur (dont la tôle) n'est nécessaire qu'en moyenne. Cependant pour déterminer la dégradation par fatigue thermique, une évaluation précise et locale de ces pics de température et des transferts thermiques dans l'emprise est nécessaire. En effet, considérant le problème thermique pendant le procédé, les modèles théoriques ne peuvent pas remplacer de véritables mesures, car les conditions aux limites du cylindre sont très complexes. Le contact entre la tôle et le cylindre fait l'objet d'une conduction thermique. De plus, les frottements significatifs à l'interface et, dans une moindre mesure, la déformation plastique de la bande sont des sources de chaleur à prendre en compte. La lubrification intensive à l'entrée de l'emprise et le refroidissement à la sortie créent une convection forcée, et l'air crée une convection libre. Ceci est résumé figure 6.1(a).

Le but premier de ce chapitre est de montrer la faisabilité technique de l'insertion d'un thermocouple à l'intérieur du cylindre pour interpréter les mesures de température grâce à la solution inverse que nous avons proposée

au chapitre précédent et qui permet d'obtenir la température de surface et les flux de chaleur (cf figure 6.1(b) où R_s est le rayon du cylindre et r_m le rayon de mesure). A partir des champs de température et des flux, évalués par méthode inverse, nous pouvons évaluer la fatigue thermique en suivant parmi de nombreux exemples le travail de Corral et al. (2004).

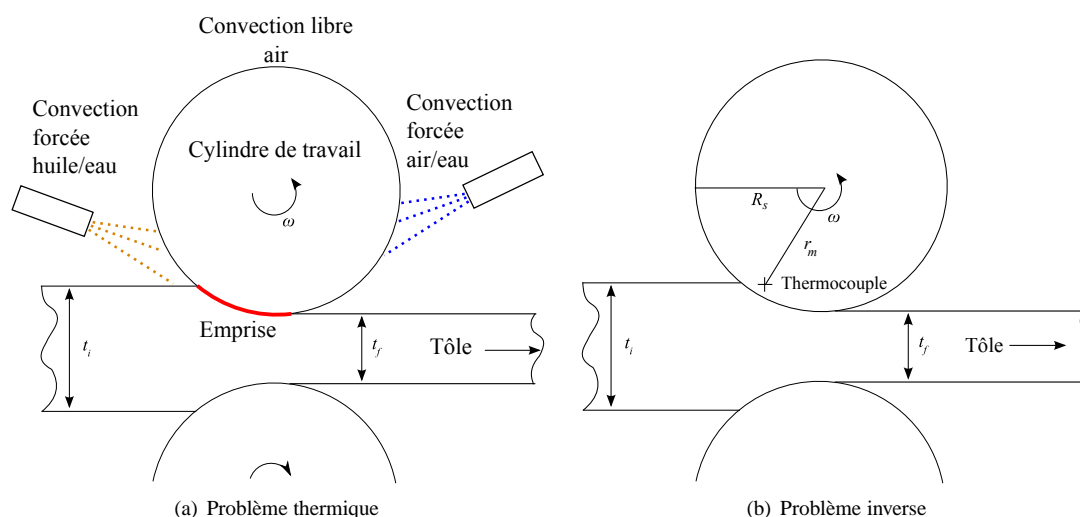


FIGURE 6.1 – Problèmes

6.2. Insertion des thermocouples

Les capteurs de température sont munis de thermocouples de type K fixés dans une petite pièce en acier que nous nommerons le plug. Le diamètre du filament du thermocouple est d'environ 0.5 mm. Cette valeur peut paraître élevée, d'une part par rapport à des thermocouples beaucoup plus fins, d'autre part en considérant les dynamiques rapides qui doivent être enregistrées, et enfin, du fait de la faible profondeur à laquelle nous devons les insérer (environ 0.5 mm, cf chapitre précédent). Mais le système doit être suffisamment solide pour résister au niveau de contraintes élastiques atteint en laminage sans rompre le filament. Ainsi, la température mesurée est en fait une moyenne du champ de température dans l'épaisseur du filament. Cependant ce choix technologique est un compromis acceptable entre précision et durabilité. Dans le cas de cette étude aucun thermocouple n'a cédé, alors que des diamètres plus fins de filament (certes plus précis) auraient conduit à des ruptures après quelques tours de laminage seulement.

Deux types d'insertion des thermocouples sont testés et comparés. Le premier type est nommé slot (par entaille) (cf Fig.6.2(a)). Le thermocouple est placé dans une entaille faite à la surface du plug et soudé dans celle-ci. Un métal d'apport est ensuite ajouté pour recouvrir le thermocouple et remplir l'entaille. Ce capteur a une réponse rapide à un échelon de température parce que le thermocouple est bien noyé dans un métal conducteur de la chaleur (il n'y a pas de vide ni d'air). Cependant ce type de montage est moins pérenne que le second type de capteur développé. Ce dernier nommé drill (percer) consiste à percer un trou sous la surface du plug et d'y insérer le thermocouple (cf Fig.6.2(b)). Ainsi une forte isolation, due à l'air restant dans le trou où est fixé le thermocouple, rend ce type de capteur beaucoup moins sensible et son temps de réponse à un échelon de température est beaucoup plus long. Cependant, les caractéristiques mécaniques de ce montage sont réputées être meilleures. Une photo des deux capteurs (slot et drill) est présentée figure 6.3.

Les plugs dans lesquels sont insérés les thermocouples, soit par entaille soit par perçage, doivent être insérés dans le cylindre. Ainsi, ce dernier est percé depuis la surface vers le centre avec un diamètre légèrement inférieur à celui du plug sur environ 2 cm et avec un diamètre comparable à celui des fils ensuite. De plus, pour l'évacuation des fils, le cylindre est percé en son centre selon son axe. Les deux plugs sont ainsi insérés à des angles distants de $\pi/4$. L'idée est de fixer les plugs dans le cylindre par serrage, c'est-à-dire en force (cf Fig.6.4). Pour cela deux techniques ont été proposées et testées. La première consiste à rentrer le plug (dont le diamètre est légèrement supérieur au trou prévu dans le cylindre) en appuyant dessus, la seconde technique consiste à plonger le plug dans

de l'azote liquide pour le refroidir fortement et obtenir un rétrécissement de son diamètre. Il est alors inséré sans problème dans le trou prévu dans le cylindre, et lorsque le plug retrouve la température ambiante la dilatation, thermique le serre dans le trou. Le taux de serrage est meilleur pour la seconde technique, d'ailleurs on observe un léger enfoncement dans le cylindre après les essais pour le plug monté en force alors qu'aucun enfoncement n'est visible pour le plug inséré grâce à l'azote liquide. Nous ne présentons donc les résultats que pour cette dernière technique d'insertion. Finalement, après l'insertion du plug dans le cylindre, celui-ci dépasse de la surface : un polissage (rectification) est donc requis pour éviter toute marque sur la bande. Il est important de noter que l'orientation du filament est parallèle à l'axe du cylindre, pour se placer dans le sens des isothermes, ce choix est motivé par le fait que la température n'évolue presque pas dans le sens de l'axe du cylindre (au milieu de celui-ci). En effet, toute autre direction subit des évolutions de température (surtout dans le sens radial par exemple), ainsi nous mesurerions une moyenne sur la longueur du filament, ce qui dégraderait la mesure.

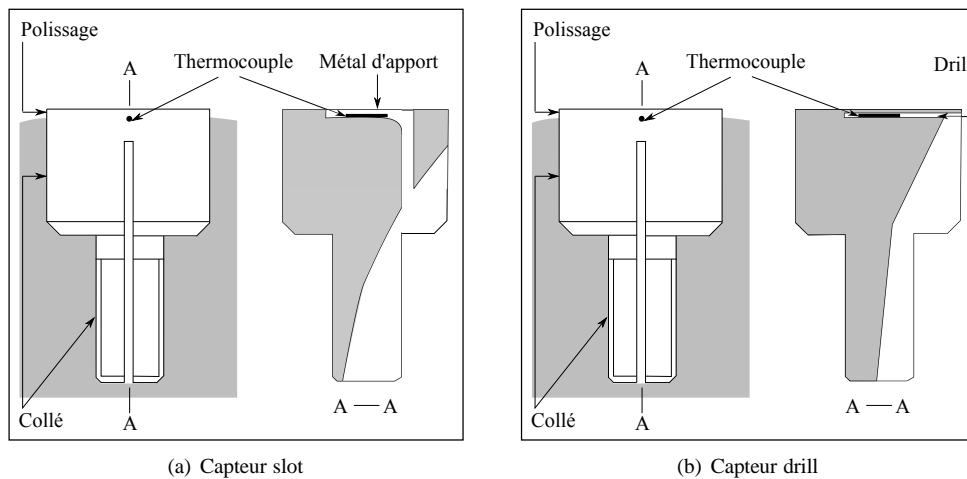


FIGURE 6.2 – Capteurs slot et drill



(a) Photographie du slot



(b) Photographie du drill

FIGURE 6.3 – Photographies

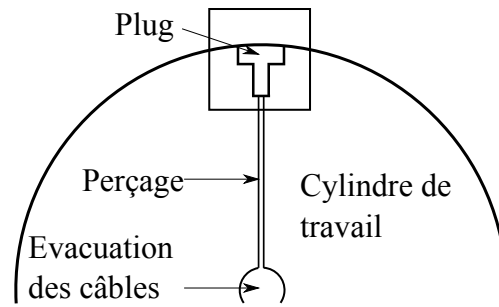


FIGURE 6.4 – Insertion du plug dans le cylindre

Par ailleurs, le fait d'avoir percé des trous dans le cylindre peut inciter à reconsidérer la méthode inverse du chapitre précédent, qui se fonde sur un cylindre plein. Cependant la perturbation introduite est du second ordre, dans la mesure où le transfert de chaleur est localisé dans les premiers millimètres de peau du cylindre qui restent massifs.

6.3. Système d'acquisition

Un système d'acquisition à haute résolution (16 bits) et haute fréquence (10 kHz max) a été conçu spécialement pour cette application. Le système est embarqué avec le cylindre tournant : les télémètres, les encodeurs et les transmetteurs sont fixés directement sous le plug (au niveau des cales) pour permettre d'alimenter le système d'acquisition embarqué et de collecter le signal, qui est ensuite transféré à la centrale d'acquisition principale (fixe hors du cylindre) grâce à un système sans fils par transmission inductive. Une photographie du bord du cylindre monté avec le système à induction est présenté figure 6.5.

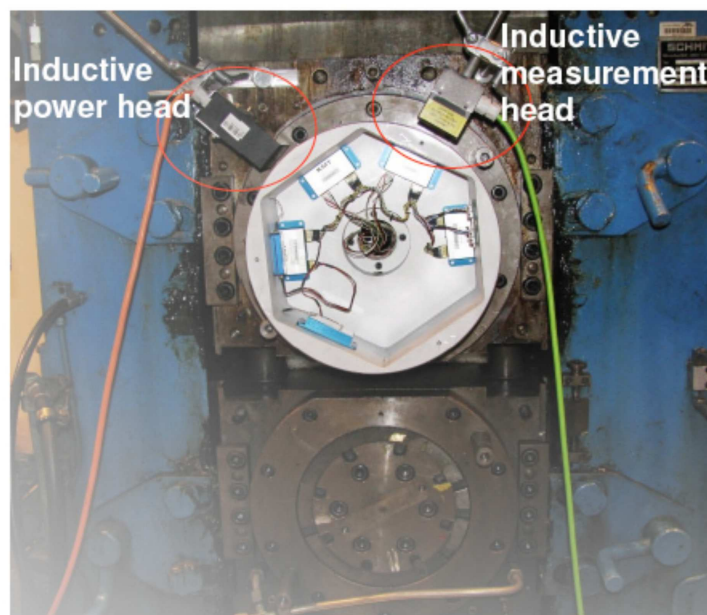


FIGURE 6.5 – Système de transmission inductif

6.4. Calibrage

6.4.1. Matériau équivalent

Les thermocouples sont des composants constitués de plusieurs couches de matériaux différents. Le filament du thermocouple est recouvert d'une isolation électrique et d'une gaine de protection. Comme nous l'avons déjà spécifié au chapitre 5, le matériau considéré pour le calcul inverse est un matériau équivalent comme le présente la figure 6.6. La méthode inverse requiert une diffusivité thermique (et une conductivité thermique pour les flux) indépendante de la température. Pour le capteur slot la figure 6.7 montre ces propriétés thermiques en fonction de la température pour le métal d'apport qui a des propriétés thermiques proches des autres composants (comme l'isolation électrique, la gaine de protection et le cylindre lui-même). Une dépendance quasi linéaire (avec un faible coefficient directeur) est notable. Par ailleurs la position du capteur n'est pas définie comme un point de l'espace, du fait que le thermocouple a une dimension. Ainsi, de la même manière que l'on modélise la complexité physique du capteur par un matériau équivalent, la position théorique ponctuelle de mesure est également un élément de modélisation.

Donc, nous devons établir par calibrage trois grandeurs équivalentes (au sens que ce ne sont pas des grandeurs mesurables mais qui tiennent à la modélisation) D , λ et r_m .

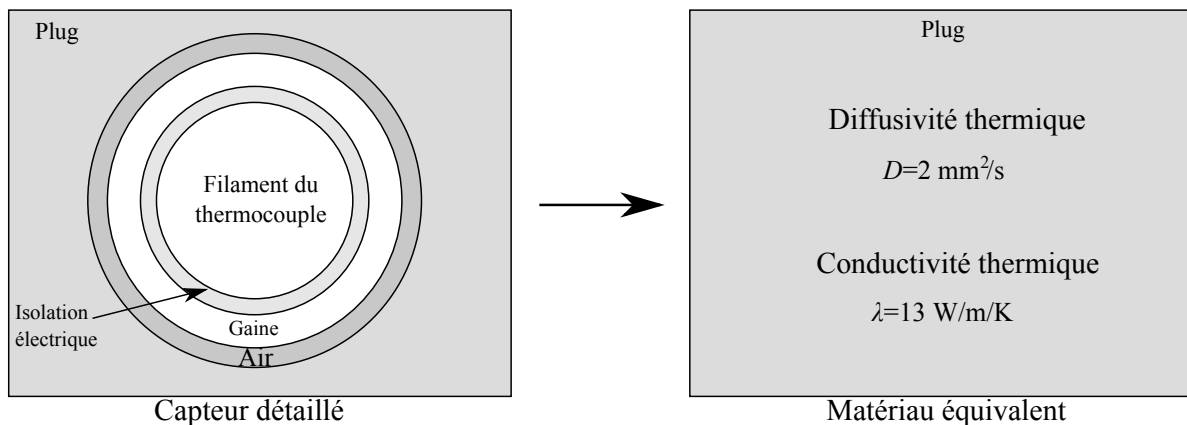
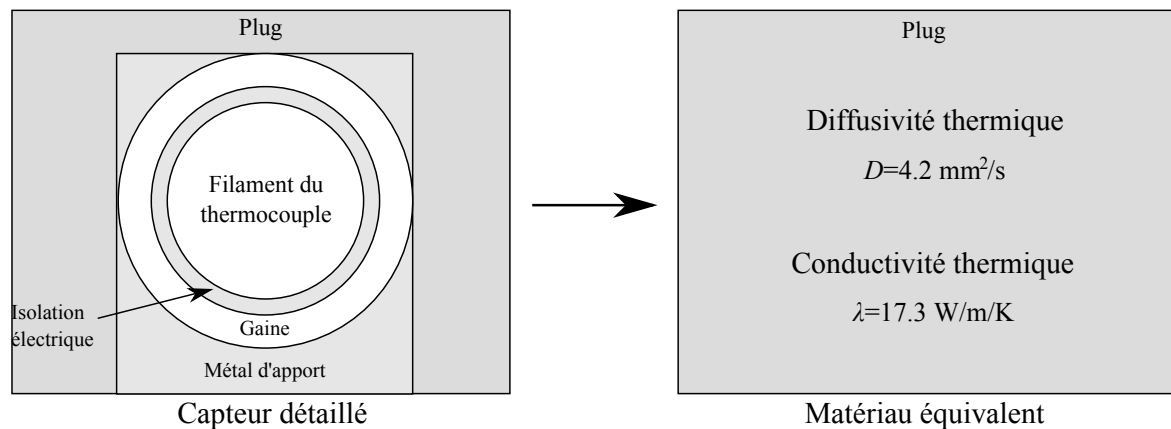
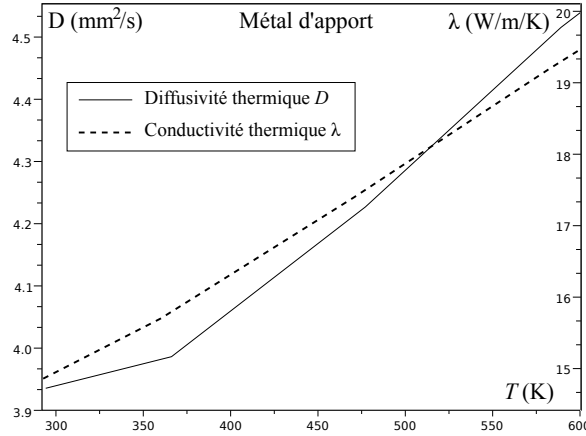


FIGURE 6.6 – Matériau équivalent

FIGURE 6.7 – Diffusivité et conductivité thermiques vs T

6.4.2. Procédure de calibrage

Il s'agit d'imposer au cylindre un chargement bien connu, qui permette de connaître la solution analytique en température partout dans le cylindre. Nous identifions D , λ et r_m pour minimiser l'écart entre la température mesurée au cours du temps et la température analytique théorique dans le cylindre sous ce chargement thermique connu.

La procédure retenue par les expérimentateurs est d'asperger le cylindre (qui est à ce stade immobile) avec de l'eau chaude (au niveau du capteur), ceci est représenté figure 6.8(a). Nous considérons pour ne pas alourdir inutilement la solution analytique de calibrage que le cylindre est plongé dans un bain d'eau chaude (sur toute sa circonférence). En fait les deux situations sont extrêmement proches pendant un certain laps de temps du fait que le flux orthoradial est très faible comparé au flux radial. Nous considérons que l'intervalle de temps $[0, t_0]$ sur lequel nous identifions les mesures et la solution analytique, est suffisamment court pour pouvoir se contenter de la solution ou tout le cylindre est plongé dans l'eau chaude, mais suffisamment long pour être cependant représentatif.

Nous avons développé la solution analytique d'un cylindre soumis à une température extérieure T_e (où e signifie eau) alors qu'il est initialement à la température ambiante T_a . Le flux entrant dans le cylindre est alors défini par $\text{HTC}(T^c - T_e)$, nous prenons une estimation du HTC pour le contact entre l'eau aspergée et l'acier du cylindre $\text{HTC}=19\,750\text{ W/m}^2/\text{K}$. Cette solution analytique est démontrée en annexe A (il s'agit d'un cas particulier lorsque $n = 0$). Nous avons donc la température théorique du cylindre T^c (où c signifie calibrage) évaluée au rayon de mesure interne r_m :

$$T^c(t)[r_m, D, \lambda] = T_e + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2y_q(T_a - T_e)J_1(y_q)}{\left(y_q^2 + \frac{R_s^2 \text{HTC}^2}{\lambda^2}\right) [J_0(y_q)]^2} J_0\left(\frac{r_m}{R_s} y_q\right) \exp\left(-\frac{D y_q^2 t}{R_s^2}\right) \quad (6.1)$$

où y_q sont les racines positives et successives de $y \mapsto (\lambda y/R_s) J'_0(y) + \text{HTC} J_0(y)$.

Nous cherchons donc D , λ et r_m qui réalisent le minimum entre la température théorique analytique $T^c(t)$ et la température mesurée en fonction du temps $T^m(t)$ soit :

$$\min \left(\int_0^{t_0} (T^c(t) - T^m(t))^2 dt \right) \quad (6.2)$$

Nous devons résoudre un problème de minimisation sous contraintes, les contraintes étant que les valeurs de D , λ et r_m doivent rester proches des valeurs de conception. Pour cette étude nous n'avons pas développé la procédure de minimisation (beaucoup d'algorithmes sont proposés dans les logiciels de calcul), un ajustement à la main a été fait. A terme, un algorithme devra être utilisé. Pour le capteur slot, le minimum est atteint pour $D = 4.2\text{ mm}^2/\text{s}$ (diffusivité thermique) et $\lambda=0.0173\text{ W/mm/K}$ (conductivité thermique) et $R_s - r_m = 0.51\text{ mm}$ (où $R_s=234.5\text{ mm}$). La figure 6.8(b) montre le modèle analytique pour les valeurs retenues ainsi que les mesures. Pour le capteur

drill, la couche d'air diminue les caractéristiques de transfert thermique et nous avons $D = 2 \text{ mm}^2/\text{s}$ et $\lambda=0.013 \text{ W/mm/K}$ et $R_s - r_m = 0.58 \text{ mm}$.

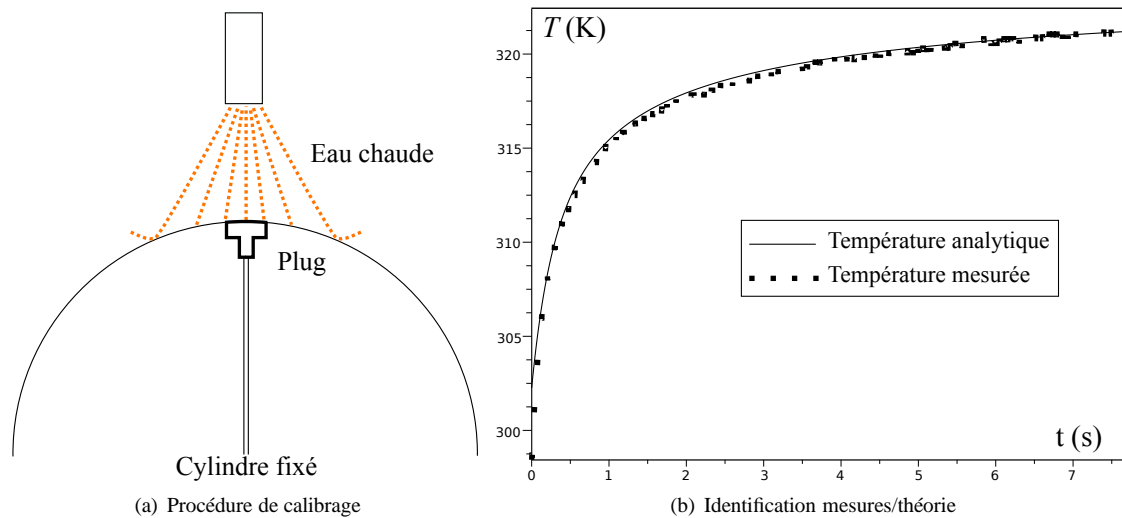


FIGURE 6.8 – Calibrage

6.5. Commentaire sur le temps de réponse

Tout isolation thermique sera responsable d'un retard dans la réponse du thermocouple sollicité par un échelon de température, l'isolation thermique due à l'air dans le cas du capteur drill est particulièrement importante. Cette notion de retard a donné lieu à plusieurs confusions dans les discussions avec certains interlocuteurs, nous clarifions donc la problématique des temps de réponse. Pour un thermocouple soumis à un échelon de température, on appelle en général temps de réponse le temps caractéristique que le thermocouple met à atteindre un certain pourcentage de la valeur de la température imposée. Il ne faut pas penser qu'il s'agisse là du temps minimal entre deux prises de mesure consécutives avec le thermocouple. En effet, nous ne cherchons pas la température uniforme d'un milieu, (auquel cas il faudrait attendre au minimum le temps de réponse du capteur pour afficher la valeur) mais au contraire nous cherchons la température transitoire dans le thermocouple. Le problème de diffusion dans ce dernier (responsable du temps de réponse) est pris en compte dans la profondeur équivalente que nous avons définie (plus le thermocouple est gros, plus la position équivalente sera profonde, et donc plus le temps pour que le capteur réagisse sera long). Ainsi, la diffusion dans le thermocouple est prise en compte dans la méthode inverse thermique. Nous avons choisi des thermocouples assez épais, qui ont un fort temps de réponse comparé à certains thermocouples très fins, mais cela ne limite en rien le sens physique d'une mesure à très haute fréquence d'acquisition. La température affichée à chaque instant de mesure est bien la moyenne du champ de température dans le filament.

6.6. Essais sur laminoir pilote

Un produit en acier faiblement allié d'aluminium (de ratio initial largeur sur épaisseur variant entre 100 et 60) a été laminé dans des conditions pilotes sur le laminoir à chaud de Maizières-les-Metz dont le cylindre de travail supérieur est équipé d'un capteur slot et d'un capteur drill (rayon du cylindre $R_s = 234.5 \text{ mm}$). Les signaux de température pendant le laminage ont été stockés grâce à la centrale d'acquisition décrite à la section 6.3. Le cylindre est refroidi à l'air en dehors de l'emprise (sans eau) et n'a pas été lubrifié.

Ces conditions très simples ont été choisies pour pouvoir ensuite identifier facilement le coefficient de transfert thermique local dans l'emprise noté $HTC_{t/c}$ (t/c signifiant tôle/cylindre), ce qui sera fait à la section 6.10. En effet la thermique de la bande est grandement simplifiée par ces conditions sans refroidissement ni lubrification. Le récapitulatif des tests est fait au tableau 6.1. La température de la tôle est estimée à l'entrée de l'emprise par

un premier pyromètre (pyro 1) et à la sortie par un second pyromètre (pyro 2). La température du four est aussi reportée, de telle sorte que l'épaisseur d'oxyde, créé à la surface du produit (calamine), puisse être estimée (cf section 6.9). La vitesse de rotation du cylindre est fixée pour toutes les bandes et toutes les passes à 1.5 m/s ce qui revient à 2π rad/s soit un tour par seconde.

TABLE 6.1 – Récapitulatif des essais

Test	Passe	Réduction (%)	Force de laminage (kN)	Vitesse (m/s)	Température du four (°C)	Température de la bande (pyro 1) (°C)	Température de la bande (pyro 2) (°C)
1	1	5.17	207	1.5	1150	1100	1060
	2	5.10	249	1.5	-	1053	1042
	3	3.85	215	1.5	-	1043	1022
	4	3.79	228	1.5	-	1029	1013
	5	3.99	230	1.5	-	1020	995
2	1	9.94	264	1.5	1150	1103	1076
	2	9.10	298	1.5	-	1055	1059
	3	11.94	355	1.5	-	1040	979
	4	9.58	295	1.5	-	1030	1004
3	1	14.64	339	1.5	1150	1117	1060
	2	15.36	394	1.5	-	1030	1024
	3	13.92	380	1.5	-	1020	1010
	4	15.77	429	1.5	-	1002	990
4	1	19.29	429	1.5	1150	1093	1000
	2	20.17	525	1.5	-	995	987
	3	17.45	631	1.5	-	965	927
	4	19.09	592	1.5	-	930	920
6	1	18.61	597	1.5	1050	1027	955
	2	20.07	680	1.5	-	988	989
	3	18.21	635	1.5	-	973	920
10	1	18.93	617	1.5	1150	1063	979
	2	20.15	600	1.5	-	1000	990
	3	19.33	550	1.5	-	1000	960

6.7. Comparaison entre le capteur slot et drill

Les évolutions des températures mesurées avec le capteur slot et le capteur drill pendant deux tours sont présentées figure 6.9. La réponse du capteur drill est plus lente et plus faible que celle du capteur slot alors que les deux capteurs ont des distances équivalentes par rapport à la surface très comparables : ≈ 0.5 mm. Cette différence de réponse vient du fait de l'air contenu dans le capteur drill, qui agit comme une forte isolation thermique. Les problèmes d'inversion étant mal posés, les estimations de température et des flux à la surface du cylindre sont attendues pour être de bien meilleure qualité pour le capteur slot que pour le capteur drill, car pour ce dernier le champ de température est identifié à partir d'un signal beaucoup plus faible, et ainsi les erreurs dans les intégrales seront beaucoup plus élevées. La figure 6.10 confirme clairement cette prédiction des qualités respectives pour les deux capteurs différents. Les deux solutions donnent le même ordre de grandeur pour la température et le flux radial en surface, cependant d'importantes oscillations apparaissent dans le cas du capteur drill, du fait que les erreurs commises dans les intégrales sont amplifiées par la méthode inverse. Ainsi, il est nécessaire d'améliorer le capteur drill en essayant de remplir l'interstice d'air avec un métal d'apport du même type que celui utilisé pour le capteur slot. Par ailleurs, le capteur slot permet une bonne lecture des températures et du flux radial en surface, ainsi nous ne considérons plus que ce dernier capteur dans la suite.

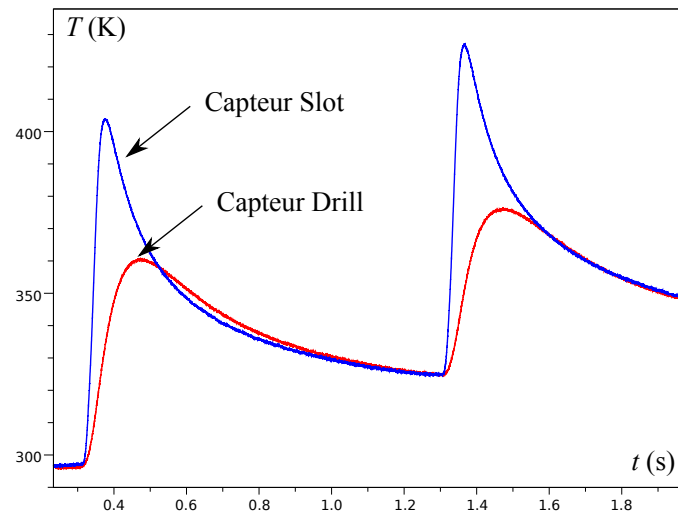


FIGURE 6.9 – Mesures avec les capteurs slot et drill

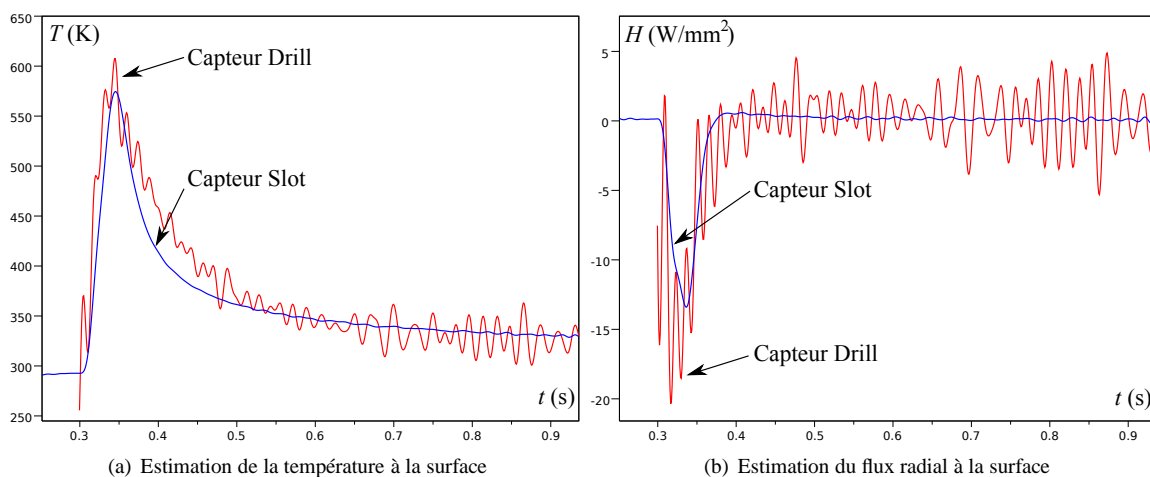


FIGURE 6.10 – Comparaison entre les capteurs slot et drill

6.8. Influence du taux de réduction

Dans cette section, l'influence du taux de réduction de l'épaisseur de la bande est étudiée. Les premières passes des tests 1, 2, 3 et 4 sont considérées (cf tableau 6.1), ce qui correspond approximativement à des taux de réduction de 5%, 10%, 15% et 20%. La fréquence d'acquisition est 10 kHz excepté pour le taux à 20% (5 kHz). La figure 6.11 présente les mesures de température pour ces quatre réductions. Il est notable que le signal est très propre avec un faible niveau de bruit (± 0.5 K), qui dans le domaine fréquentiel atteint principalement les hautes fréquences. Nous pouvons observer également une augmentation de la température entre le début et la fin de chaque tour (état transitoire). Le bruit n'est pas filtré car nous avons précisé que la méthode inverse du chapitre précédent était très robuste au bruit, et d'ailleurs le sinus cardinal ayant pour but de limiter l'effet Gibbs, agit également comme un filtre passe-bas.

La figure 6.12 présente la température de surface et le flux radial reconstruits à la surface du cylindre par méthode inverse. Plus le taux de réduction est élevé, plus le flux de chaleur, ainsi que le pic de température correspondant, sont importants. Cela est dû au fait que la pression augmente avec le taux de réduction, ainsi le

contact entre la tôle et le cylindre est plus fort et le transfert thermique est facilité. En d'autres termes, le coefficient de transfert thermique dans l'emprise $HTC_{t/c}$ augmente avec la pression. En outre, nous avons également dans une moindre mesure, une élévation des transferts thermiques, due à l'effet de la friction et de la plastification, toutes deux de plus en plus importantes à mesure que le taux de réduction augmente. Par ailleurs une zone de forte chauffe correspondant au passage dans l'emprise est visible figure 6.12(b) mais également une zone de refroidissement à l'air avec un flux radial qui change de signe, de manière assez manifeste à la sortie de l'emprise ou le différentiel de température entre le cylindre chaud et l'air froid est le plus grand.

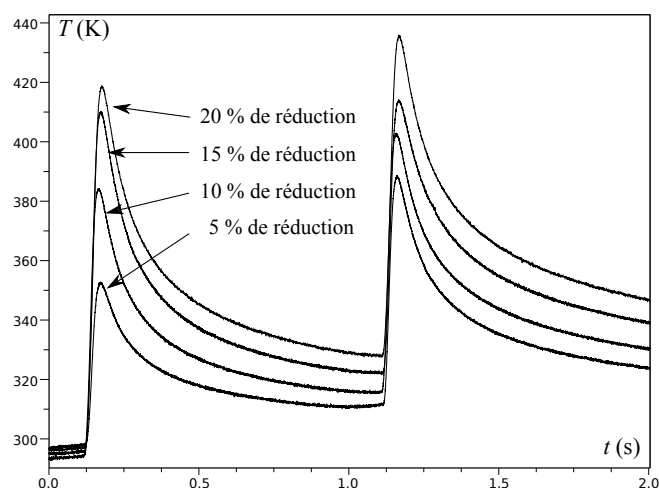


FIGURE 6.11 – Mesures de température pour un tour pour différents taux de réduction

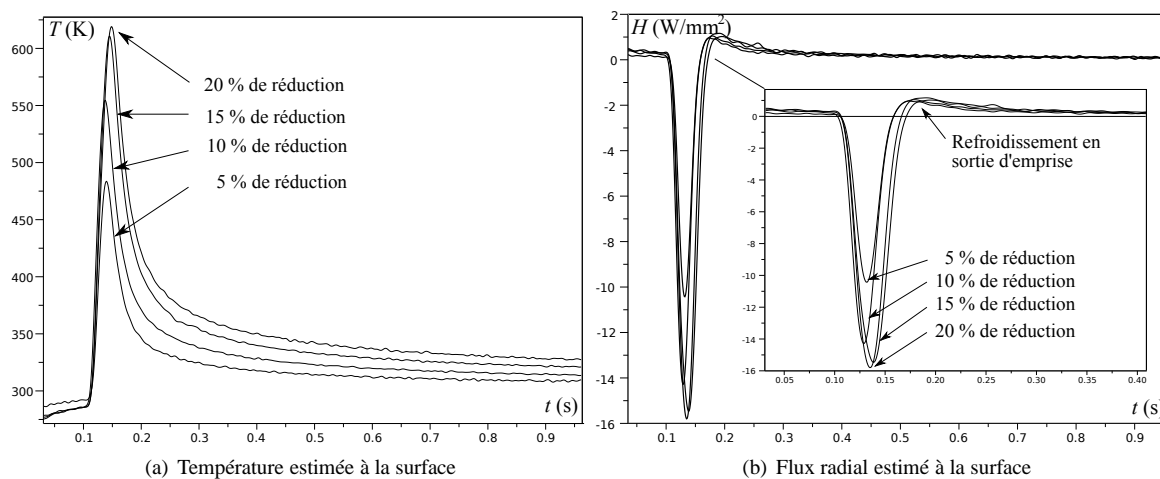


FIGURE 6.12 – Estimation à la surface du cylindre

6.9. Influence de l'épaisseur de calamine

Dans cette section, nous étudions l'influence de l'épaisseur d'oxyde formé à la surface de la bande (calamine). Quand la tôle est chauffée à haute température, de la calamine se forme à la surface pendant le refroidissement. Donc pour une bande laminée à une température donnée, plus elle a été chauffée dans le four avant d'atteindre cette température, plus l'épaisseur de calamine est élevée. Cet oxyde est un mauvais conducteur de la chaleur ($\lambda \simeq 2$ W/m/K) par rapport au métal du produit ($\lambda \simeq 15$ W/m/K). Ainsi, les flux de chaleur entrant dans le cylindre doivent

être d'autant plus faibles que l'épaisseur de calamine est élevée. Les deux premiers tours de la première passe des tests 6 et 10 sont utilisés pour vérifier cela. Les températures des bandes à l'entrée de l'emprise (pyro 1) sont similaires pour ces deux tests (cf tableau 6.1). Tant le taux de réduction, que la force de laminage sont similaires dans les deux cas. Ainsi, la seule différence significative est la température du four, qui détermine l'épaisseur de calamine. Un modèle numérique, développé en interne par ArcelorMittal, a été utilisé pour évaluer ces épaisseurs d'oxyde. Pour le test 6, la bande a été préchauffée à 1050 °C ce qui produit une épaisseur de calamine $\simeq 35 \mu\text{m}$ à la surface de la bande, et pour le test 10 la bande a été préchauffée à 1150 °C ce qui produit une épaisseur de calamine $\simeq 60 \mu\text{m}$. La figure 6.13 présente l'évaluation du flux radial à la surface du cylindre obtenu par méthode inverse (à partir des mesures en sous-couche) et les résultats sont très cohérents avec l'estimation des épaisseurs respectives d'oxyde. Il est remarquable que la température de la bande est presque la même pour les deux test (6 et 10). L'influence de l'épaisseur de la calamine à la surface de la tôle s'explique donc par la modification du coefficient de transfert thermique dans le contact $\text{HTC}_{t/c}$.

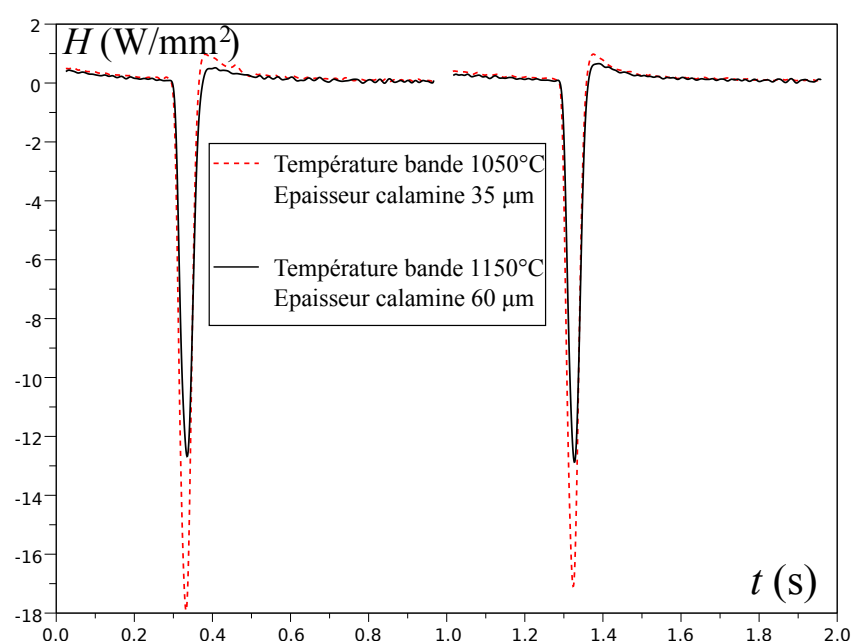


FIGURE 6.13 – Influence de l'épaisseur de calamine

6.10. Modèle de coefficient de transfert thermique dans l'emprise

Pour un certain nombre de codes numériques servant à simuler la thermique des cylindres de travail, une décomposition en zones avec des coefficients de transfert thermique constants sur la zone, permet d'appréhender les conditions aux limites compliquées du problème. En fait si l'on considère les températures des pyromètres (pyro1 et pyro 2) pour évaluer la thermique de la tôle, la connaissance de la température à la surface et du flux radial entrant dans le cylindre permet de déterminer un coefficient de transfert thermique local dans l'emprise $\text{HTC}_{t/c}$ via la relation : flux radial = $\text{HTC}_{t/c}(\text{Température de la tôle} - \text{Température de surface})$. $\text{HTC}_{t/c}$ est calculé pour la première passe et le premier tour des tests 6 et 10 et nous pouvons remarquer un profil en cloche dans l'emprise (cf figure 6.14). Nous pouvons d'ailleurs souligner le fait que pour l'essai 6 (où l'épaisseur de calamine est plus faible que pour l'essai 10) le $\text{HTC}_{t/c}$ local est plus élevé comme nous l'avons déjà précisé.

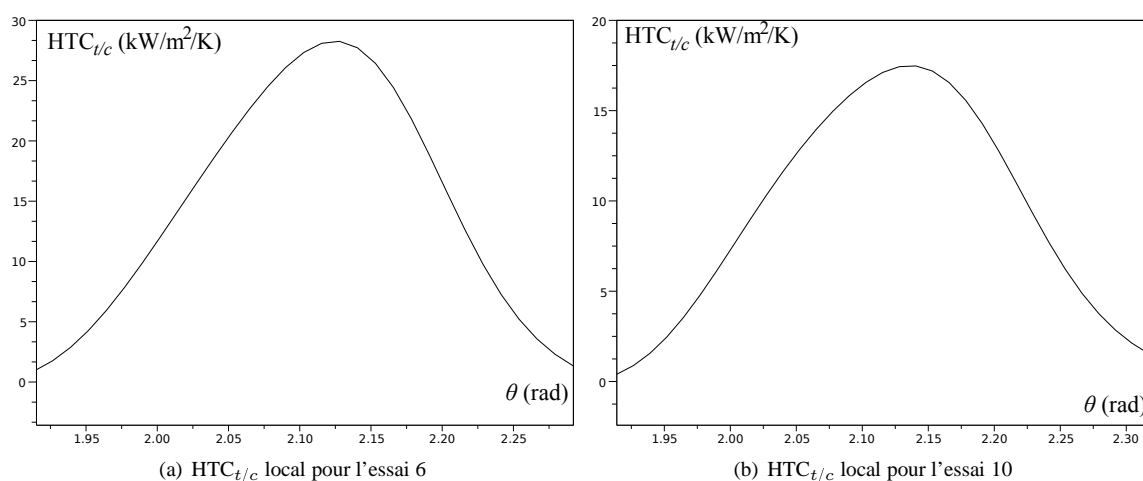


FIGURE 6.14 – Variation locale du HTC

6.11. Conclusion

Nous avons démontré la faisabilité de l'insertion de thermocouples sous la surface du cylindre en vue d'utiliser la méthode inverse thermique développée au chapitre 5. Les mesures obtenues sont très satisfaisantes du fait d'un niveau de bruit très acceptable et d'une très bonne cohérence des résultats de l'inversion avec l'évolution du taux de réduction de l'épaisseur du produit et de l'épaisseur de calamine. La procédure de calibrage du montage est simple à réaliser (on asperge le cylindre avec de l'eau chaude dont la température est contrôlée) et permet de ne pas modéliser dans le détail le capteur (assez complexe) ni la dépendance de propriétés thermiques en fonction de la température. La position ponctuelle théorique du point de mesure est également obtenue par calibrage. Pour se convaincre que ce calibrage est bien suffisant, nous avons reconstruit la température et le flux radial en surface pour les réductions à 5, 10, 15 et 20 % avec l'algorithme N, que nous avons introduit au chapitre 5. Si pour des conditions très singulières, ce dernier n'est pas satisfaisant (comme nous l'avons montré), pour des conditions de laminage à faible vitesse en revanche (comme c'est le cas de ces essais) l'algorithme fonctionne. Celui-ci repose sur une méthode numérique, et le capteur a été modélisé dans le détail et les propriétés thermiques peuvent dépendre de la température comme le montre la figure 6.7. Le fait remarquable est que les reconstructions sont quasiment identiques à celles que nous obtenons avec la méthode inverse analytique, que nous avons développée. Ainsi, le calibrage semble suffisant pour modéliser la complexité locale du système de mesure.

Par ailleurs, un autre résultat important ressort de cette étude expérimentale. Le coefficient de transfert thermique local dans le contact tôle/cylindre $HTC_{t/c}$ n'est pas constant, mais a l'allure d'une cloche qui pourrait être proportionnelle au niveau de pression. Le choc thermique est donc probablement moins fort que dans les modèles où l'on suppose le coefficient de transfert thermique constant, il faut donc, à partir de cette variation locale que nous avons exhibée, estimer à nouveau la durée de vie des cylindres soumis à une usure en fatigue thermique.

CHAPITRE VII

PROBLÈME COUPLÉ THERMOÉLASTIQUE

Ce chapitre est une adaptation d'un article publié dans Applied Mathematical Modelling (Weisz-Patrault et al. (2013a)). Nous avons développé d'une part une méthode inverse élastique sous condition isotherme pour évaluer les contraintes de contact entre l'outil et le produit et d'autre part une méthode inverse thermique pour évaluer la température et le flux de chaleur dans l'emprise. Cependant, la mesure du tenseur des contraintes dans le cylindre prend nécessairement en compte les contraintes thermiques (dus aux déformations thermiques). Ainsi, pour le laminage à chaud, où ces déformations dues au gradient de température ne peuvent pas être négligées, une correction par couplage thermoélastique est nécessaire. Nous développons, dans ce chapitre, ce couplage en résolvant l'équation de Navier (équilibre portant sur les déplacements), cela permet non seulement de corriger la solution élastique inverse isotherme du chapitre 4, mais également d'évaluer les contraintes thermiques responsables de l'usure en fatigue faisant apparaître des "griffes de chaleur" altérant l'état de surface du cylindre de travail. La durée de vie peut donc être mieux anticipée, à partir de l'évaluation par méthode inverse de ces contraintes thermiques. Pour tester la solution, la même simulation de laminage à chaud qu'au chapitre 4 est utilisée. Par ailleurs nous démontrons que le temps de calcul de la présente solution est négligeable devant celui des méthodes inverses élastique et thermique des chapitres 4 et 5, cette nouvelle solution ne présente donc aucun coût supplémentaire.

7.1. Introduction

7.1.1. Objectifs du chapitre

Nous ne refaisons pas ici toute la revue bibliographique des chapitres 4 et 5. Cependant nous présentons un résumé rapide des principes analytiques de ces deux solutions inverses (élastique isotherme et thermique) pour permettre au lecteur de poursuivre la lecture sans se référer aux pages précédentes. Pour estimer les contraintes de contact entre la tôle et le cylindre, Legrand et al. (2012b) a récemment proposé un calcul par méthode inverse (fondée sur l'approche isotherme de Meierhofer and Stelson (1987)), qui interprète les mesures de deux capteurs de déformation à deux positions radiales différentes. Legrand et al. (2012b) a étudié entre autres l'épaisseur de peau dans le cylindre où les contraintes thermiques ne sont pas négligeables et a tenté d'utiliser la méthode inverse en plaçant les points de mesure plus profondément (là où le problème est raisonnablement libre de contraintes thermiques). L'inversion a échoué et les auteurs en concluent que l'inversion (avec cette méthode) est impossible en laminage à chaud. Dans ce chapitre, nous proposons une alternative à ce raisonnement en prenant en compte les contraintes thermiques dans la méthode inverse élastique du chapitre 4, en couplant les deux problèmes thermique et élastique. Le capteur de déformation à fibres optiques pourra donc être placé le plus près possible de la surface en vue d'une bonne performance de la méthode inverse. Pour cela il est nécessaire de connaître le champ de température dans le cylindre, ce qui est rendu possible par la méthode inverse thermique du chapitre 5.

La figure 7.1 présente un schéma du système de mesure thermoélastique. Le thermocouple est placé au rayon r_m et le capteur de déformation (et donc de contrainte) par fibres optiques est placé au rayon R_m . La rotation du cylindre permet d'obtenir une mesure sur les cercles respectifs. L'ensemble des autres notations est explicité dans le tableau 7.1

TABLE 7.1 – Nomenclature

R_s	Rayon du cylindre	$\sigma^{(..)}_p$	Champ de contrainte prescrit
r_m	Rayon de mesure de la température	$\sigma^{(..)}_A$	Champ de contrainte du problème A
R_m	Rayon de mesure des contraintes	$\sigma^{(..)}_B$	Champ de contrainte du problème B
r	Position radiale	$\sigma^{(..)}_C$	Champ de contrainte du problème C
θ	Position angulaire	$\sigma^{th}_{(..)}$	Contraintes thermiques ($\sigma^{th} = \sigma^A + \sigma^B$)
t	Temps	T^A	Vecteur contrainte du problème A
k	Indice du tour	T^B	Vecteur contrainte du problème B
t_k	Temps au début du tour k	T^C	Vecteur contrainte du problème C
T_a	Température initiale du cylindre	N_0	Ordre de troncature
(e_r, e_θ)	Directions radiale et tangentielle	N_1	Ordre de troncature
ω	Vitesse de rotation	N_2	Ordre de troncature
D	Diffusivité thermique du cylindre	ζ_n	Coefficients (complexes)
α	Dilatation thermique du cylindre	J_n	n ième fonction de Bessel de première espèce
α_F	Dilatation thermique des fibres optiques	$x_{n,p}$	Racines positives et successives de J_n
λ, μ	Coefficients de Lamé du cylindre	$U_n(r)$	Fonction dans le développement de u_r
T_i	Température initiale de la bande	$u_{n,p}(r)$	Fonction dans le développement de u_r
F_R	Force de laminage	$V_n(r)$	Fonction dans le développement de u_θ
t_i	Épaisseur initiale de la bande	$v_{n,p}(r)$	Fonction dans le développement de u_θ
t_f	Épaisseur finale de la bande	L_n	Coefficients
R	Taux de réduction	$l_{n,p}$	Coefficients
L_c	Longueur de l'emprise	$S_n(r)$	Fonction dans le développement de σ^A
$HTC_{t/c}$	Coefficient de transfert thermique dans l'emprise	$s_{n,p}(r)$	Fonction dans le développement de σ^A
σ_0	Limite d'élasticité initiale de la bande	z	Variable complexe $z = r \exp(i\theta)$
T	Température du cylindre	$\Phi(z)$	Potentiel holomorphe
\hat{T}_n^k	n ième coefficient de Fourier de T	$\Psi(z)$	Potentiel holomorphe
T_n	Coefficient dérivé de \hat{T}_n^k	a_k	Coefficients du développement de $\Phi(z)$
$\gamma_{n,p,k}$	n ième coefficient dans le développement de T	b_k	Coefficients du développement de $\Psi(z)$
\mathbf{u}	Champ de déplacement	$\Phi_B(z)$	Potentiel holomorphe
u_r	Déplacement radial	$\Phi_B(z)$	Potentiel holomorphe
u_θ	Déplacement tangentiel	ϕ_n	Coefficients du développement de $\Phi_B(z)$
$(..)$	Symbole désignant $rr, r\theta$ ou $\theta\theta$	ψ_n	Coefficients du développement de $\Psi_B(z)$
$\sigma(..)$	Champ de contrainte du problème global	ϵ	Erreur de reconstruction

Bien que l'objectif principal de ce chapitre soit de corriger la méthode inverse élastique isotherme du chapitre 4, nous développons la solution pour permettre une évaluation des contraintes thermiques, qui pourront ensuite être utilisées dans un modèle de fatigue. Corral et al. (2004) a proposé une approche mixte analytique/numérique pour prédire la durée de vie des cylindres sur la base d'un calcul analytique des contraintes thermiques. Cependant le couplage des déplacements radial et tangentiel ainsi que les rotations sont négligés dans l'équation de Navier. La solution proposée par Corral et al. (2004) est donc comparée à la solution que nous développons dans ce chapitre pour évaluer l'influence de telles simplifications. Il apparaît que ces dernières ne sont pas très opportunes, et qu'ainsi une meilleure évaluation des contraintes thermiques peut être utilisée dans les modèles de fatigue grâce à la solution que nous proposons ici. Par ailleurs, si les contraintes thermiques sont négligeables pour le laminage à froid, les déformations thermiques du cylindre, même minimales, modifient le profil d'entrefer et a donc un rôle central à jouer dans la prédiction de la planéité.

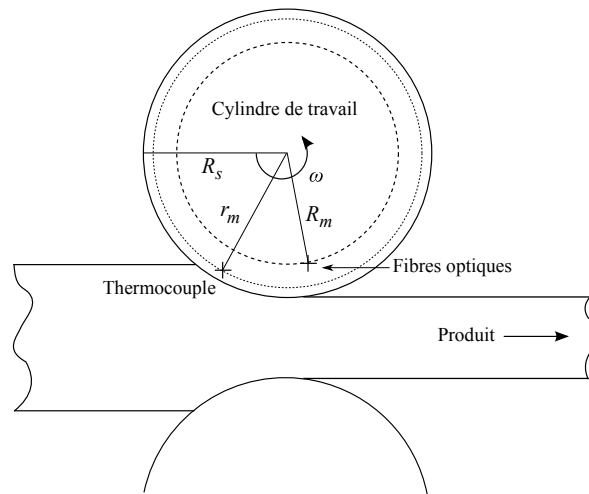


FIGURE 7.1 – Géométrie

7.1.2. Fibres optiques et thermocouple

Les fibres optiques sont collées dans un trou de très faible diamètre à l'intérieur du cylindre. Les contraintes thermoélastiques du cylindre sont transmises à la fibre par l'intermédiaire de la colle. L'élasticité de la colle implique une fonction de transfert ou un calibrage comme au chapitre 6, mais cette question n'est pas étudiée dans ces travaux. En outre, la variation de température des fibres optiques crée une déformation thermique additionnelle à celles-ci. Cette déformation thermique n'a rien à voir avec les contraintes thermiques appliquées par le cylindre sur la fibre et doit être compensée séparément. Cela est fait en considérant un corps axial (la fibre) chargé par une variation de température $\Delta T = T - T_a$. La déformation thermique est donc $\epsilon = \alpha_F \Delta T$, où T est la température à la position de la fibre, T_a sa température initiale et α_F son coefficient de dilatation thermique. Dans la suite, nous supposons que cette compensation des déformations thermiques de la fibre elle-même est faite.

Nous rappelons que l'insertion du thermocouple pour obtenir le champ de température dans le cylindre a été étudiée au chapitre 6. Cependant, l'insertion pratique des fibres optiques pour obtenir les déformations est en cours de réalisation par ArcelorMittal dans le cadre du projet européen RFS-PR-08051.

7.2. Validation de la méthode

Dans ce chapitre, nous validons l'exactitude de la solution analytique. D'autre part, nous montrons la nécessité de corriger les données d'entrée (contraintes mesurées au rayon R_m) de la méthode inverse élastique isotherme du chapitre 4 pour le calcul des contraintes de contact. Cette correction est faite grâce au présent couplage thermoélastique analytique. Pour ces validations, nous avons recouru comme pour les chapitres 4 et 5 à une simulation numérique du procédé de laminage. Nous utilisons le modèle de Hacquin (1996) qui couple la tôle et le cylindre. Comme nous l'avons déjà précisé en introduction, ce modèle appelé Lam3/Tec3 est un logiciel développé par le Cemef, Transvalor, ArcelorMittal Research et Alcan, et résout le problème thermo-élastique-viscoplastique de la bande par calcul aux éléments finis 3D (ou 2D) et résout le problème thermoélastique du cylindre par des calculs semi-analytiques. Entre autres, Lam3/Tec3 donne en sortie les contraintes de contact entre la tôle et le cylindre de travail (cf figure 7.6(a)), qui sont dans cette étude identiques à celles du cas de laminage à chaud présenté au chapitre 4. Puis la température dans tout le cylindre (cf figure 7.3) est calculée par méthode des différences finies en utilisant des coefficients de transfert thermique sur différentes zones du cylindre. Les conditions de simulation sont listées dans le tableau 7.2.

La solution analytique de couplage thermoélastique, que nous développons dans ce chapitre, est validée en la comparant avec un modèle thermoélastique plan, aux éléments finis, réalisé avec Cast3m CEA (2011). Le champ de température donné par la simulation Lam3/Tec3 est imposé, et les contraintes purement thermiques associées sont calculées. Nous obtenons une très bonne cohérence entre la solution analytique et le modèle numérique.

En outre, les contraintes de contact produites par Lam3/Tec3 sont utilisées pour calculer les contraintes purement élastiques au rayon R_m (identiques à celles du chapitre 4). Ces données purement élastiques correspondent aux valeurs corrigées des contraintes thermoélastiques que nous mesurerions avec des fibres optiques. Ces dernières sont calculées en ajoutant les contraintes thermiques prévues par la solution analytique développée ici. Il est remarquable que la méthode inverse élastique du chapitre 4 donne de mauvais résultats si les données d'entrée ne sont pas purement élastiques, il convient donc de les corriger en soustrayant les contraintes purement thermiques, obtenues grâce aux développements qui suivent.

7.3. Principe de superposition

Le problème thermoélastique étant linéaire, nous utilisons le théorème de superposition. La figure 7.2 résume la décomposition du problème. Le problème auxiliaire A consiste à trouver une solution particulière de l'équation de Navier (équation d'équilibre exprimée en déplacements) avec un second membre pour tenir compte des déformations thermiques. Aucune condition aux limites n'est imposée, celle-ci est au contraire déduite de la solution particulière, nous avons donc un vecteur contrainte calculé à la frontière (circonférence du disque de rayon R_s) noté $\mathbf{T}^A = \sigma_{rr}^A(R_s, \theta)\mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta}^A(R_s, \theta)\mathbf{e}_\theta$. Il est donc nécessaire de corriger ce premier problème avec le problème auxiliaire B, qui est quant à lui élastique isotherme. Le vecteur contrainte appliqué à la frontière du problème auxiliaire B est $-\mathbf{T}^A$ de telle sorte que le vecteur contrainte du problème A+B est nul. Donc le tenseur des contraintes purement thermiques est $\sigma_{(..)}^{th} = \sigma_{(..)}^A + \sigma_{(..)}^B$ (où *th* signifie thermique). Le problème auxiliaire C n'est autre que le problème inverse élastique isotherme résolu au chapitre 4. Par ailleurs, le champ de température considéré pour le problème auxiliaire A est donné par la méthode inverse thermique du chapitre 5.

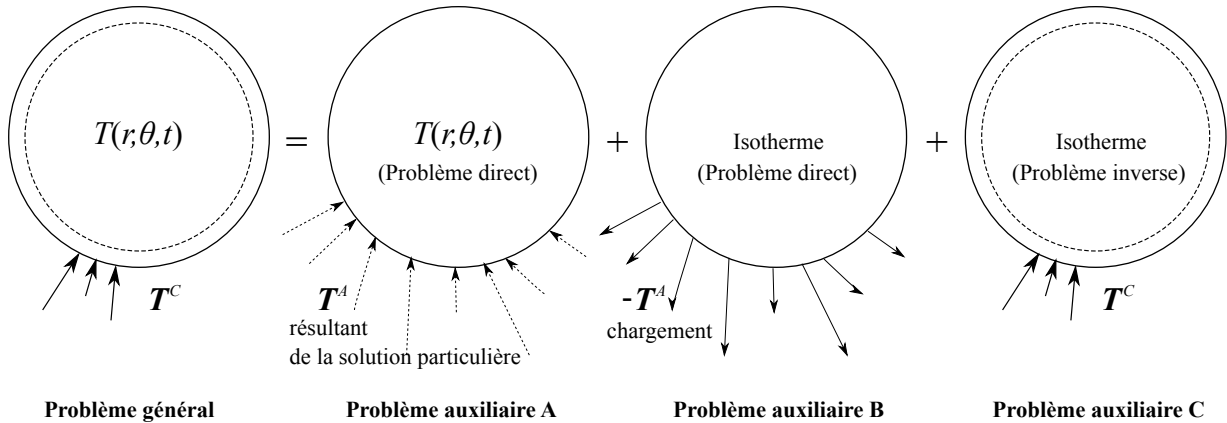


FIGURE 7.2 – Superposition

7.4. Problème auxiliaire C

Nous rappelons très brièvement la solution inverse élastique du chapitre 4 (c'est-à-dire le problème auxiliaire C). Nous mesurons le tenseur des contraintes au rayon interne R_m , et nous notons les contraintes mesurées $\sigma_{rr}^m(\theta)$, $\sigma_{r\theta}^m(\theta)$ et $\sigma_{\theta\theta}^m(\theta)$. En pratique, ces contraintes sont de type thermoélastique. Ainsi, du fait de la linéarité du problème, nous pouvons les décomposer en une partie purement élastique et une partie purement thermique $\sigma_{(..)}^m = \sigma_{(..)}^e + \sigma_{(..)}^{th}$ (où *e* signifie élastique et *th* thermique et *(..)* désigne *rr*, *rθ* et *θθ*). Les données d'entrée (corrigées) de la méthode inverse élastique isotherme (problème C) sont $\sigma_{(..)}^e = \sigma_{(..)}^m - \sigma_{(..)}^{th}$. Pour effectuer la correction des mesures, le tenseur purement thermique $\sigma_{(..)}^{th}$ est nécessaire ; celui-ci est évalué aux sections 7.6 et 7.7.

Le champ de contrainte élastique $\sigma_{(..)}^C$ du problème auxiliaire C vérifie les équations (établies au chapitre 3)

données par Muskhelishvili (1977) :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^C(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}^C(r, \theta) = 2 \left(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right) \\ -\sigma_{rr}^C(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}^C(r, \theta) + 2i\sigma_{r\theta}^C(r, \theta) = 2 \exp(2i\theta) (\Psi(z) + \overline{z}\Phi'(z)) \end{cases} \quad (7.1)$$

où $z = r \exp(i\theta)$ et $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ sont deux potentiels holomorphes à déterminer. Mathématiquement nous pouvons développer en série entière :

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(\frac{z}{R_m} \right)^k \quad \left| \quad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \left(\frac{z}{R_m} \right)^k \quad (7.2)$$

En combinant (7.1) et (7.2) et en notant que $\sigma^C(R_m, \theta) = \sigma^e(\theta)$ nous obtenons :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^e(\theta) + \sigma_{\theta\theta}^e(\theta) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \exp(ik\theta) + \overline{a_k} \exp(-ik\theta) \\ -\sigma_{rr}^e(\theta) + \sigma_{\theta\theta}^e(\theta) + 2i\sigma_{r\theta}^e(\theta) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (b_k \exp(i(k+2)\theta) + ka_k \exp(ik\theta)) \end{cases} \quad (7.3)$$

De cette dernière équation, nous obtenons les expressions de a_k et b_k :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}^e(\theta) + \sigma_{\theta\theta}^e(\theta) d\theta \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ a_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_{rr}^e(\theta) + \sigma_{\theta\theta}^e(\theta)}{\exp(ik\theta)} d\theta \\ \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-\sigma_{rr}^e(\theta) + \sigma_{\theta\theta}^e(\theta) + 2i\sigma_{r\theta}^e(\theta)}{\exp(i(k+2)\theta)} d\theta - (k+2)a_{k+2} \end{cases} \quad (7.4)$$

En combinant (7.1) et (7.2), les contraintes de contact sont obtenues :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^C(R_s, \theta) + \sigma_{\theta\theta}^C(R_s, \theta) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{R_s}{R_m} \right)^k (a_k \exp(ik\theta) + \overline{a_k} \exp(-ik\theta)) \\ -\sigma_{rr}^C(R_s, \theta) + \sigma_{\theta\theta}^C(R_s, \theta) + 2i\sigma_{r\theta}^C(R_s, \theta) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{R_s}{R_m} \right)^k (b_k \exp(i(k+2)\theta) + ka_k \exp(ik\theta)) \end{cases} \quad (7.5)$$

En éliminant $\sigma_{\theta\theta}^C(R_s, \theta)$ dans (7.5), le vecteur contrainte $T^C = \sigma_{rr}^C(R_s, \theta)e_r + \sigma_{r\theta}^C(R_s, \theta)e_\theta$ est facilement obtenu.

7.5. Champ de température évalué par méthode inverse

Le champ de température analytique est obtenu à partir de la température $T^m(\theta, k)$ mesurée au rayon r_m (où k est l'indice du tour). Les mesures sont développées en série de Fourier :

$$T^m(\theta, k) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \hat{T}_n^k \exp(in\theta) \quad (7.6)$$

où les coefficients de Fourier sont :

$$\hat{T}_n^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T^m(\theta, k) \exp(-in\theta) d\theta \quad (7.7)$$

Nous avons démontré au chapitre 5 que le champ de température peut s'écrire sous la forme suivante :

$$T(r, \theta, t, k) = 2 \sum_{n=0}^{N_1} \operatorname{Re} \left[T_n \frac{J_n(\zeta_n r)}{J_n(\zeta_n r_m)} \exp(in\theta) \right] + 2 \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{p=1}^{N_2} \operatorname{Re} \left[\gamma_{n,p,k} J_n \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right) \exp \left(-\frac{t-t_k}{\tau_{n,p}} \right) \exp(in\theta) \right] \quad (7.8)$$

où nous avons noté $T_n = \hat{T}_n^k \operatorname{sinc}^g(n/N_1)$ et $\zeta_n = \sqrt{-i\omega n/D}$. Les coefficients $\gamma_{n,p,k}$ sont déterminés par (5.24).

7.6. Problème auxiliaire A

7.6.1. Déplacements

Le problème auxiliaire A consiste, comme nous l'avons dit plus haut, à trouver une solution particulière de l'équation de Navier avec un second membre en température (exposée au chapitre 3) :

$$\mu \operatorname{div} [\nabla \mathbf{u}] + (\lambda + \mu) \nabla [\operatorname{div} \mathbf{u}] = \alpha(3\lambda + 2\mu) \nabla T \quad (7.9)$$

En écrivant \mathbf{u} en coordonnées polaires le système d'équations aux dérivées partielles suivant est obtenu :

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \mu \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - (\lambda + 3\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= \alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{\partial T}{\partial r} \\ \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + (\lambda + 3\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} &= \alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Le champ de température étant écrit sous la forme de (7.8), les déplacements polaires u_r et u_θ sont recherchés sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= 2 \sum_{n=0}^{N_1} \operatorname{Re} [U_n(r) \exp(in\theta)] + 2 \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{p=1}^{N_2} \operatorname{Re} \left[u_{n,p}(r) \exp \left(-\frac{t-t_k}{\tau_{n,p}} \right) \exp(in\theta) \right] \\ u_\theta(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{N_1} \operatorname{Re} [V_n(r) \exp(in\theta)] + 2 \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{p=1}^{N_2} \operatorname{Re} \left[v_{n,p}(r) \exp \left(-\frac{t-t_k}{\tau_{n,p}} \right) \exp(in\theta) \right] \end{aligned} \quad (7.11)$$

Nous introduisons les quantités suivantes pour simplifier :

$$\begin{cases} L_n = \alpha \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \left(\frac{\zeta_n T_n}{J_n(\zeta_n r_m)} \right) \\ l_{n,p} = \alpha \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \left(\frac{\gamma_{n,p,k} x_{n,p}}{r_m} \right) \end{cases} \quad (7.12)$$

Mentionnons le fait que les quantités $\{U_n(r), V_n(r), u_{n,p}(r), v_{n,p}(r), L_n, l_{n,p}\}$ sont à réactualiser à chaque tour et devraient donc être indicées en k , cependant cette notation supplémentaire n'est pas utilisée pour rendre la

solution plus lisible. Le système (7.10) combiné avec (7.11) et (7.12) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \left(U_n''(r) + \frac{U_n'(r)}{r} - \frac{U_n(r)}{r^2} \right) - \mu n^2 \frac{U_n(r)}{r^2} \\ + (\lambda + \mu) in \frac{V_n'(r)}{r} - (\lambda + 3\mu) in \frac{V_n(r)}{r^2} = (\lambda + 2\mu) L_n J_n'(\zeta_n r) \\ \mu \left(V_n''(r) + \frac{V_n'(r)}{r} - \frac{V_n(r)}{r^2} \right) - (\lambda + 2\mu) n^2 \frac{V_n(r)}{r^2} \\ + (\lambda + \mu) in \frac{U_n'(r)}{r} + (\lambda + 3\mu) in \frac{U_n(r)}{r^2} = in(\lambda + 2\mu) L_n \frac{J_n(\zeta_n r)}{\zeta_n r} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \left(u_{n,p}''(r) + \frac{u_{n,p}'(r)}{r} - \frac{u_{n,p}(r)}{r^2} \right) - \mu n^2 \frac{u_{n,p}(r)}{r^2} \\ + (\lambda + \mu) in \frac{v_{n,p}'(r)}{r} - (\lambda + 3\mu) in \frac{v_{n,p}(r)}{r^2} = (\lambda + 2\mu) l_{n,p} J_n' \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right) \\ \mu \left(v_{n,p}''(r) + \frac{v_{n,p}'(r)}{r} - \frac{v_{n,p}(r)}{r^2} \right) - (\lambda + 2\mu) n^2 \frac{v_{n,p}(r)}{r^2} \\ + (\lambda + \mu) in \frac{u_{n,p}'(r)}{r} + (\lambda + 3\mu) in \frac{u_{n,p}(r)}{r^2} = in(\lambda + 2\mu) l_{n,p} \frac{J_n \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right)}{x_{n,p} \frac{r}{r_m}} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (7.13)$$

Une solution particulière de (7.13) est donnée par (preuve reportée à l'annexe B.1) :

$$\begin{array}{l} \forall n \geq 0 \\ \forall n \geq 0 \\ \forall p \geq 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} U_n(r) = -\frac{L_n}{\zeta_n^2} J_n'(\zeta_n r) \\ V_n(r) = -in \frac{L_n}{\zeta_n^2} \frac{J_n(\zeta_n r)}{\zeta_n r} \\ u_{n,p}(r) = -\frac{l_{n,p}}{(x_{n,p}/r_m)^2} J_n' \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right) \\ v_{n,p}(r) = -in \frac{l_{n,p}}{(x_{n,p}/r_m)^2} \frac{J_n \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right)}{x_{n,p} r / r_m} \end{array} \right. \quad (7.14)$$

Nous avons donc déterminé une solution particulière de l'équation de Navier. Il reste à calculer le vecteur contrainte T^A au bord du cylindre dont cette solution est responsable. Nous calculons donc le tenseur de contrainte de cette solution.

7.6.2. Contraintes

Grâce à la loi de comportement (isotrope) et à l'équation de compatibilité, nous obtenons les contraintes en fonction des déplacements :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^A = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \alpha(3\lambda + 2\mu) (T(r, \theta, t) - T_a) \\ \sigma_{r\theta}^A = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}^A = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \alpha(3\lambda + 2\mu) (T(r, \theta, t) - T_a) \end{array} \right. \quad (7.15)$$

Donc en utilisant cette dernière équation (7.15) combinée avec (7.11) et (7.14) le tenseur des contraintes devient :

$$\sigma_{(\cdot)}^A(r, \theta) = 2 \sum_{n=0}^{N_1} \text{Re} \left[S_n^{(\cdot)}(r) \exp(in\theta) \right] + 2 \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{p=1}^{N_2} \text{Re} \left[s_{n,p}^{(\cdot)}(r) \exp \left(-x_{n,p}^2 \frac{D(t-t_k)}{r_m^2} \right) \exp(in\theta) \right] \quad (7.16)$$

où (...) désigne rr , $r\theta$ ou $\theta\theta$ et :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} S_0^{rr}(r) = \alpha(3\lambda + 2\mu)(T_a - T_0) \\ S_0^{r\theta}(r) = 0 \\ S_0^{\theta\theta}(r) = \alpha(3\lambda + 2\mu)(T_a - T_0) \end{cases} \\ \\ \forall n \geq 1 & \begin{cases} S_n^{rr}(r) = \frac{2\mu L_n}{\zeta_n} \left(\frac{J'_n(\zeta_n r)}{\zeta_n r} - n^2 \frac{J_n(\zeta_n r)}{\zeta_n^2 r^2} \right) \\ S_n^{r\theta}(r) = \frac{2\mu i n L_n}{\zeta_n} \left(-\frac{J'_n(\zeta_n r)}{\zeta_n r} + \frac{J_n(\zeta_n r)}{\zeta_n^2 r^2} \right) \\ S_n^{\theta\theta}(r) = -\frac{2\mu L_n}{\zeta_n} \left(\frac{J'_n(\zeta_n r)}{\zeta_n r} - \left(\frac{n^2}{\zeta_n^2 r^2} - 1 \right) J_n(\zeta_n r) \right) \end{cases} \quad (7.17) \\ \\ \forall n \geq 0 \\ \forall p \geq 1 & \begin{cases} s_{n,p}^{rr}(r) = \frac{2\mu l_{n,p}}{x_{n,p}/r_m} \left(\frac{J'_n(x_{n,p}r/r_m)}{x_{n,p}r/r_m} - n^2 \frac{J_n(x_{n,p}r/r_m)}{(x_{n,p}r/r_m)^2} \right) \\ s_{n,p}^{r\theta}(r) = \frac{2\mu i n l_{n,p}}{x_{n,p}/r_m} \left(-\frac{J'_n(x_{n,p}r/r_m)}{x_{n,p}r/r_m} + \frac{J_n(x_{n,p}r/r_m)}{(x_{n,p}r/r_m)^2} \right) \\ s_{n,p}^{\theta\theta}(r) = -\frac{2\mu l_{n,p}}{x_{n,p}/r_m} \left(\frac{J'_n(x_{n,p}r/r_m)}{x_{n,p}r/r_m} - \left(\frac{n^2}{(x_{n,p}r/r_m)^2} - 1 \right) J_n(x_{n,p}r/r_m) \right) \end{cases} \end{aligned}$$

Le tenseur de contrainte est donc entièrement déterminé pour cette solution grâce aux paramètres L_n et $l_{n,p}$ qui sont calculés à partir des paramètres du champ de température.

7.7. Problème auxiliaire B

La correction du problème auxiliaire A est assurée par le problème auxiliaire B isotherme, comme le précise la figure 7.2. Nous utilisons une fois encore les équations de Muskhelishvili (1977) pour traiter ce problème :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^B(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}^B(r, \theta) = 2 \left(\Phi_B(z) + \overline{\Phi_B(z)} \right) \\ -\sigma_{rr}^B(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}^B(r, \theta) + 2i\sigma_{r\theta}^B(r, \theta) = 2\exp(2i\theta) (\Psi_B(z) + \bar{z}\Phi_B'(z)) \end{cases} \quad (7.18)$$

où $z = r \exp(i\theta)$ et $\Phi_B(z)$ et $\Psi_B(z)$ sont deux fonctions holomorphes inconnues. Mathématiquement nous pouvons développer ces fonctions en série entière.

$$\Phi_B(z) = \sum_{n=0}^{N_1} \phi_n \left(\frac{z}{R_s} \right)^n \quad \left| \quad \Psi_B(z) = \sum_{n=0}^{N_1} \psi_n \left(\frac{z}{R_s} \right)^n \quad (7.19)$$

L'opposé du vecteur contrainte calculé pour le problème auxiliaire A est considéré pour ce problème. Nous avons donc :

$$\mathbf{T}^B = -\mathbf{T}^A = -\sigma_{rr}^A(R_s, \theta) \mathbf{e}_r - \sigma_{r\theta}^A(R_s, \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (7.20)$$

En réécrivant (7.18) à la frontière (c'est-à-dire pour $z = R_s \exp(i\theta)$) et en soustrayant les deux équations nous obtenons :

$$-\sigma_{rr}^A(R_s, \theta) + i\sigma_{r\theta}^A(R_s, \theta) = \Phi_B(z) - \frac{z^2}{R_s^2} \Psi_B(z) - z\Phi_B'(z) + \overline{\Phi_B(z)} \quad (7.21)$$

En combinant (7.21) et (7.19), les contraintes de contact en fonction de ϕ_k et ψ_k sont obtenues :

$$-\sigma_{rr}^A(R_s, \theta) + i\sigma_{r\theta}^A(R_s, \theta) = \sum_{n=2}^{N_1} (\phi_n(1-n) - \psi_{n-2}) \exp(in\theta) + \sum_{n=1}^{N_1} \overline{\phi_n} \exp(-in\theta) + \phi_0 + \overline{\phi_0} \quad (7.22)$$

En injectant (7.16) dans (7.22) il vient :

$$\begin{cases} \phi_0 + \overline{\phi_0} = -S_0^{rr}(R_s) - \sum_{p=1}^{N_2} s_{0,p}^{rr}(R_s) \exp\left(-x_{0,p}^2 \frac{D(t-t_k)}{r_m^2}\right) \\ \phi_n = -\left(S_n^{rr}(R_s) + iS_n^{r\theta}(R_s)\right) - \sum_{p=1}^{N_2} [s_{n,p}^{rr}(R_s) + is_{n,p}^{r\theta}(R_s)] \exp\left(-x_{n,p}^2 \frac{D(t-t_k)}{r_m^2}\right) \\ \psi_{n-2} = nS_n^{rr}(R_s) - i(2-n)S_n^{r\theta}(R_s) \\ \quad + \sum_{p=1}^{N_2} [ns_{n,p}^{rr}(R_s) - i(2-n)s_{n,p}^{r\theta}(R_s)] \exp\left(-x_{n,p}^2 \frac{D(t-t_k)}{r_m^2}\right) \end{cases} \quad (7.23)$$

L'équation (7.18) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^B(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}^B(r, \theta) = 2 \sum_{n=0}^{N_1} \left(\frac{r}{R_s}\right)^n (\phi_n \exp(in\theta) + \overline{\phi_n} \exp(-in\theta)) \\ -\sigma_{rr}^B(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}^B(r, \theta) + 2i\sigma_{r\theta}^B(r, \theta) = 2 \sum_{n=0}^{N_1} \left(\frac{r}{R_s}\right)^n (\psi_n \exp(i(n+2)\theta) + n\phi_n \exp(in\theta)) \end{cases} \quad (7.24)$$

Il est très aisé d'isoler $\sigma_{rr}^B(r, \theta)$, $\sigma_{r\theta}^B(r, \theta)$ et $\sigma_{\theta\theta}^B(r, \theta)$ en prenant la somme et la différence des équations (7.24). Finalement nous avons calculé le champ de contrainte du problème A et du problème B, nous définissons le champ de contrainte purement thermique comme la somme de ces deux champs :

$$\sigma_{(..)}^{th} = \sigma_{(..)}^A + \sigma_{(..)}^B \quad (7.25)$$

où (..) désigne rr , $r\theta$ ou $\theta\theta$.

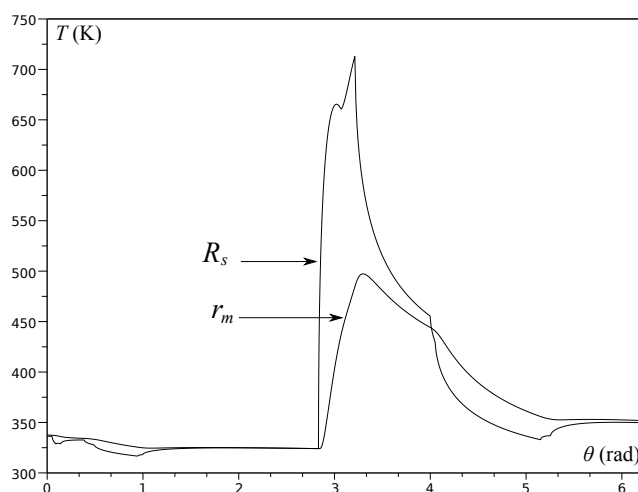
7.8. Validation de la solution

7.8.1. Champ de température en laminage à chaud

Le champ de température dans tout le cylindre est extrait de la simulation du laminage à chaud faite sur Lam3/Tec3 que nous avons présentée à la section 7.2. Les paramètres de la simulation sont listés dans le tableau 7.2. Les profils de température sur un tour calculés au rayon R_s et r_m sont présentés figure 7.3. Par ailleurs les coefficients de Fourier de la température calculée au rayon r_m (7.7) sont calculés et nous obtenons les coefficients T_n qui sont reportés en annexe B.2 au tableau B.1. Par ailleurs les coefficients $\gamma_{n,p,k}$ se calculent à partir des coefficients $\beta_{n,p,k}$ (5.31) définis au chapitre 5 (cf tableau 5.2, pour les valeurs lorsque $n = 0$).

TABLE 7.2 – Paramètres

(a) Cylindre			(b) Tôle		(c) Solution	
R_s	(mm)	177.51	Matériau	Acier	N_0	200
r_m	(mm)	177.01	t_i	(mm)	N_1	200
R_m	(mm)	174.51	t_f	(mm)	N_2	60
T_a	(K)	293.15	R	(%)		
D	(mm ² /s)	13.5	F_R	(N/mm)		
α	(K ⁻¹)	12×10^{-6}	σ_0	(MPa)		
λ	(MPa)	121153.85	T_i	(K)		
μ	(MPa)	80769.231	HTC _{t/c}	(W/m ² /K)		
ω	(rad/s)	18.76	L_c	(mm)		

FIGURE 7.3 – Température simulée aux rayons R_s et r_m .

7.8.2. Comparaison avec un modèle aux éléments finis

Les contraintes thermiques sont obtenues en sommant les contraintes des problèmes A et B exhibées aux sections 7.6 et 7.7. Nous comparons ces contraintes thermiques analytiques avec les résultats d'un calcul aux éléments finis fait sur Cast3m développé par le CEA (2011). Le champ de température décrit à la section 7.8.1 est utilisé pour cette comparaison. Du fait des gradients thermiques extrêmement élevés dans les premiers millimètres de peau du cylindre, le maillage est fortement raffiné dans cette zone. Le maillage est généré par rotation (200 incréments d'angle) d'une ligne définie par 10 noeuds, allant du centre du cylindre jusqu'à 167.51 mm, et de 100 noeuds allant de 167.51 mm jusqu'à $R_s = 177.51$ mm. Des éléments triangulaires ont été choisis. La figure 7.4(a) donne un aperçu du maillage final. Le calcul avec Cast3m est linéaire et en déformation plane. La température est spécifiée à chaque noeud du maillage et l'équilibre est assuré en bloquant le noeud central. La comparaison est présentée figure 7.4(b), et une très bonne corrélation avec la méthode analytique développée dans ce chapitre est observable.

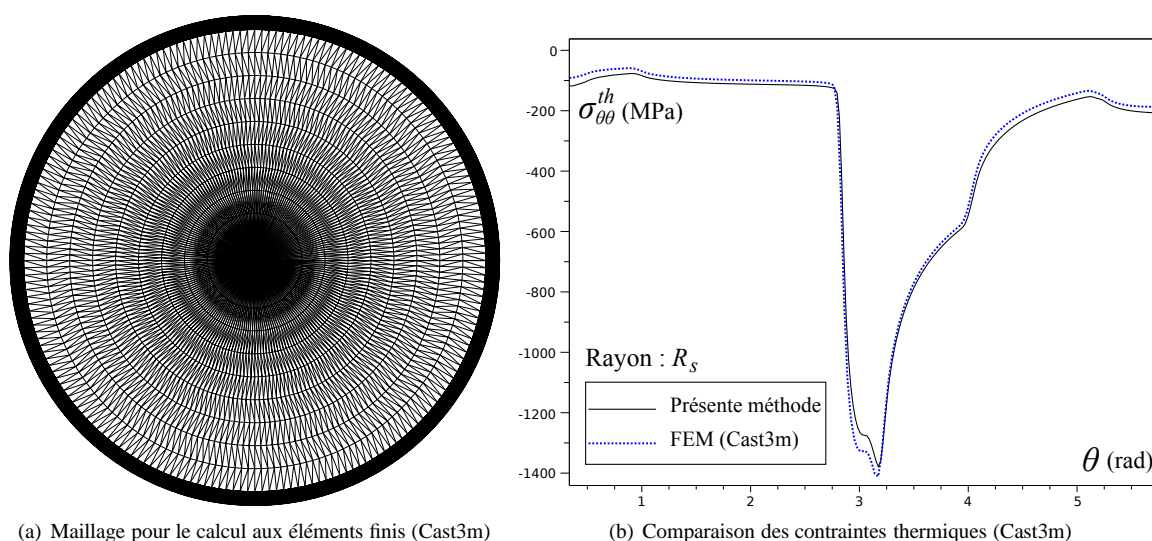


FIGURE 7.4 – Comparaison avec un modèle aux éléments finis

7.8.3. Comparaison avec un modèle approché

Corral et al. (2004) a développé un modèle approché de contraintes thermiques en résolvant l'équation de Navier en négligeant les termes de rotation et le couplage entre le déplacement radial et tangentiel. La formule analytique donnée par les auteurs est utilisée pour le champ de température décrit à la section 7.8.1. La figure 7.5 montre que ces simplifications de l'équation de Navier ne sont pas très opportunes, car la contrainte thermique orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}^{th}$ est fortement sous-estimée au rayon R_s . Ceci est d'autant plus important que la fatigue thermique est due justement à cette composante du tenseur des contraintes.

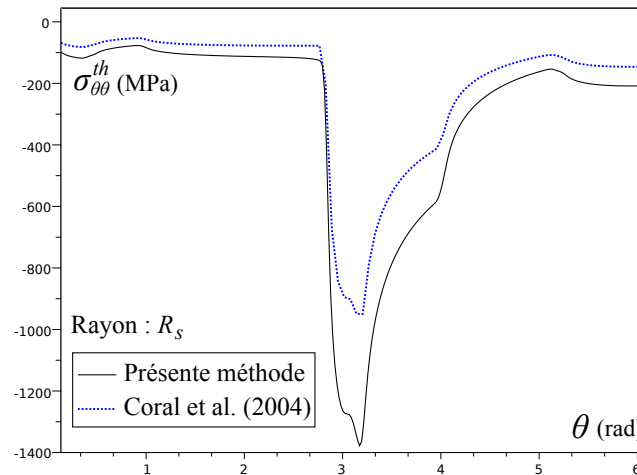


FIGURE 7.5 – Comparaison avec un autre modèle

7.9. Reconstruction des contraintes de contact

Comme nous l'avons expliqué à la section 7.2, nous réutilisons la simulation numérique du procédé de laminage à chaud, que nous avons introduite au chapitre 4. L'impact des contraintes thermiques sur la reconstruction des contraintes de contact par méthode inverse est évalué dans cette section. Les contraintes de contact entre la tôle et le cylindre sont présentées à nouveau figure 7.6(a). Les contraintes purement élastiques $\sigma_{(.)}^e$ sont ensuite calculées au rayon R_m , ces dernières représentent les données d'entrée corrigées. En ajoutant les contraintes thermiques $\sigma_{(.)}^{th}$ calculées au rayon R_m , issues du champ de température simulé, et décrit à de la section 7.8.1, nous obtenons les données thermoélastiques mesurées sans correction $\sigma_{(.)}^m$. La figure 7.6(b) présente les deux champs de contrainte au rayon R_m corrigé (purement élastique) et non corrigé (thermoélastique). Il apparaît que la composante orthoradiale ($\theta\theta$) est la plus affectée par les contraintes thermiques. Il peut être noté que la différence, entre les composantes orthoradiales purement élastique et thermoélastique, est relativement constante dans l'emprise. Cela est dû à la diffusion de la chaleur dans le cylindre. Le rayon R_m étant à 3 mm de la surface, les contraintes thermiques ont très largement diffusé à cette profondeur et s'étalent donc sur une zone beaucoup plus importante que l'emprise, par rapport aux variations très nettes que l'on observe à la surface au rayon R_s , comme on peut le constater figure 7.6(c).

Nous lançons le calcul inverse analytique élastique isotherme du chapitre 4 (problème auxiliaire C) à partir du tenseur des contraintes au rayon R_m pour les deux données d'entrée, corrigées $\sigma_{(.)}^e$ ou non corrigées $\sigma_{(.)}^m$. Nous obtenons les contraintes de contact reconstruites $\sigma_{(.)}(R_s, \theta)$, que nous comparons aux contraintes de contact que nous avons prescrites $\sigma_{(.)}^p$ (données par la simulation Lam3/Tec3 et présentées figure 7.6(a)). La qualité de la reconstruction est évaluée grâce à l'erreur quantifiée (en pourcentage) définie par l'écart relatif des entre les solutions, et donnée par (7.26). Les reconstructions des contraintes de contact entre la tôle et le cylindre sont présentées à la figure 7.7 et les erreurs de reconstruction sont listées dans le tableau 7.3, en prenant en compte les données d'entrée corrigées d'une part et non corrigées d'autre part. Il apparaît très clairement que la correction

grâce au couplage thermoélastique est nécessaire.

$$\epsilon_{(..)} = 100 \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi} [\sigma_{(..)}(R_s, \theta) - \sigma_{(..)}^p(\theta)]^2 d\theta}{\int_0^{2\pi} [\sigma_{(..)}^p(\theta)]^2 d\theta}} \quad (7.26)$$

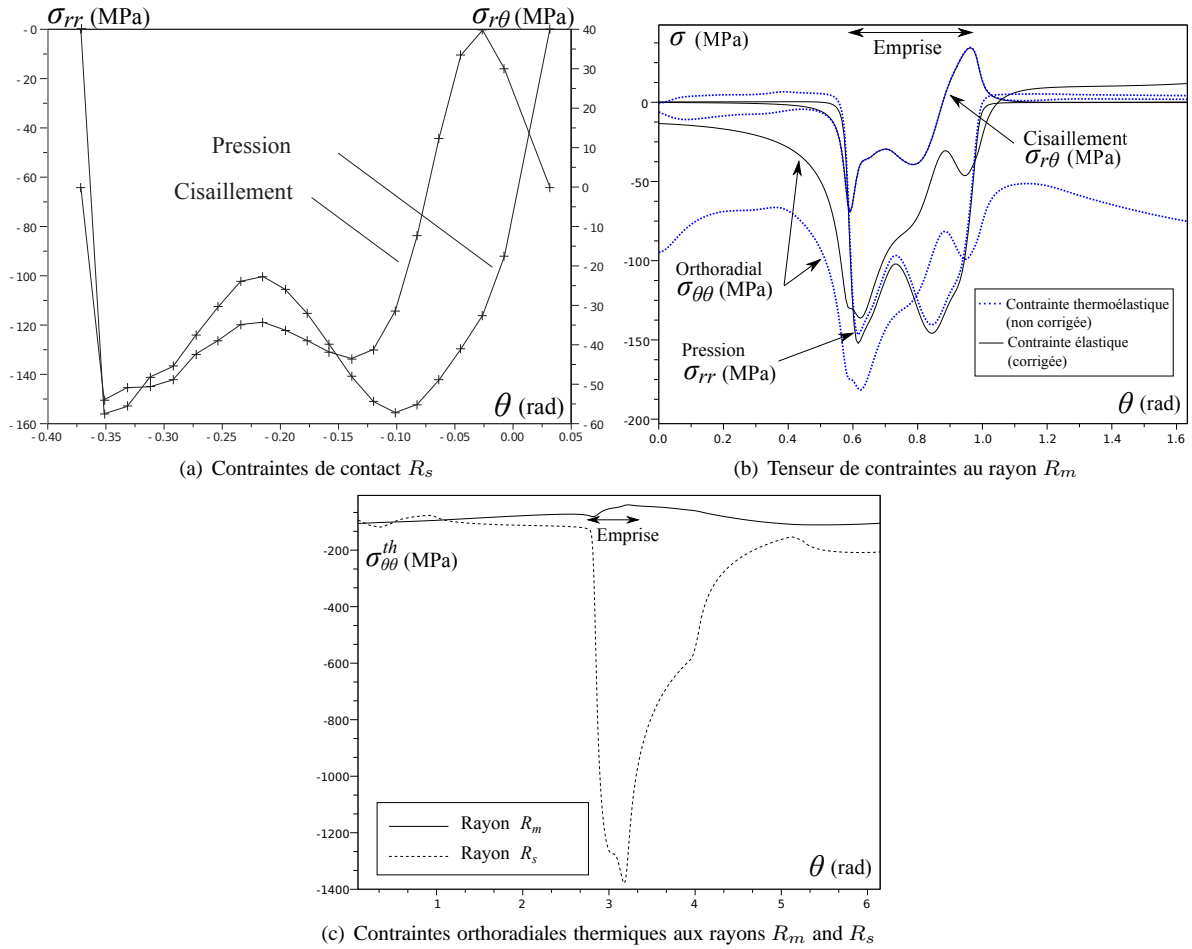


FIGURE 7.6 – Contraintes de simulation

TABLE 7.3 – Erreurs de reconstruction en laminage à chaud

	Données élastiques (corrigées)		Données thermoélastiques (non corrigées)	
	rr	$r\theta$	rr	$r\theta$
ϵ (%)	0.63	0.75	25.41	17.75

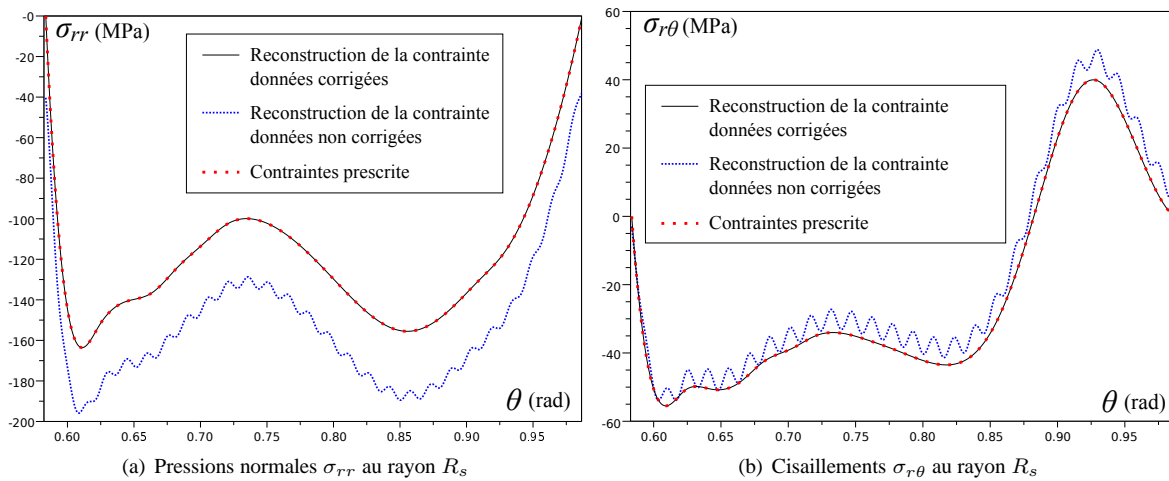


FIGURE 7.7 – Reconstruction des contraintes de contact

7.10. Temps de calcul

Comme nous l'avons souligné déjà à plusieurs reprises, l'objectif des méthodes inverses que nous développons est l'évaluation des champs en temps réel, en visant à plus ou moins long terme un asservissement des paramètres de contrôle du procédé. Nous avons opté dans le cas des deux méthodes inverses des chapitres 4 et 5 pour une programmation de la solution sous forme matricielle (et tensorielle, via des hypermatrices) pré-enregistrée et stockée dans des bibliothèques. Les seules quantités à calculer (on-line) pendant le procédé sont les intégrales de Fourier impliquées dans les coefficients L_n et $l_{n,p}$, qui s'obtiennent rapidement grâce à des fft. Si l'on considère que les méthodes inverses élastique isotherme et thermique ont déjà fait l'objet du calcul de ces fft, le couplage thermoélastique, que nous avons présenté, ne coûte pas de temps significatif supplémentaire. En effet, les coefficients L_n et $l_{n,p}$ se déduisent simplement des coefficients T_n de la méthode inverse thermique. Nous ne détaillons pas l'écriture sous forme tensorielle car cela n'ajoute rien à la compréhension de la solution.

7.11. Conclusion

La solution analytique, que nous avons développée, repose fortement sur le théorème de superposition et sur l'équation de Navier avec un second membre en température, dont nous exhibons une solution particulière. Grâce à ce couplage thermoélastique, les solutions inverses élastiques et thermiques des chapitres 4 et 5 sont à concevoir comme un seul outil pour évaluer le champ de température et de contrainte thermoélastique dans tout le cylindre de travail et en particulier à la surface pour déterminer les contraintes de contact entre la tôle et le cylindre ainsi que la température et le flux radial dans l'emprise. Cette évaluation est faite en mesurant la température au rayon r_m et les contraintes thermoélastique au rayon R_m . Ce couplage est nécessaire pour l'évaluation précise des contraintes de contact puisque l'erreur de reconstruction passe de 25.41 % à 0.63 % pour les pressions normales et de 17.75 % à 0.75 % pour les cisaillements, selon que l'on considère que les données d'entrée ne soient pas corrigées par la solution thermoélastique ou qu'elles le soient. Par ailleurs l'évaluation des contraintes purement thermiques dont la possibilité est offerte par la solution de couplage de ce chapitre, permet une meilleure évaluation de la fatigue thermique qui altère l'état de surface des cylindres et diminue fortement leur durée de vie.

Le point essentiel de ce travail est que tenir compte des contraintes thermiques ne coûte pas de temps significatif supplémentaire puisqu'elle utilise les mêmes quantités que celles déjà calculées pour la solution inverse thermique du chapitre 5.

PART B

MÉTHODES INVERSES EN TROIS DIMENSIONS

CHAPITRE VIII

THERMO-ELASTICITÉ TRIDIMENSIONNELLE

8.1. Théorie des potentiels réels

Dans ce chapitre, nous introduisons la théorie des potentiels pour l'élasticité isotrope tridimensionnelle. Si la théorie des potentiels en élasticité 2D repose sur une écriture des contraintes sous forme d'un potentiel d'Airy, l'élasticité 3D repose sur l'écriture des déplacements sous forme de potentiels. Par ailleurs, le corps des complexes a été utilisé pour l'élasticité 2D, ainsi il paraît naturel d'étendre au cas 3D ce changement de variable. Cependant il n'existe pas d'extension 3D du corps de complexe, la structure mathématique de corps se retrouve en quatre dimension dans le corps des quaternions. Quelques auteurs ont adapté la théorie de Muskhelishvili (1977) dans le corps des quaternions pour l'élasticité isotrope 3D ainsi Kutrunov (1992), Tsalik (1995) et plus récemment Bock and Gürlebeck (2009) proposent des résultats très intéressants. Mais peu de développements pratiques en sont issus. D'ailleurs Penrose (2004) précise dans son ouvrage général que le corps des quaternions n'offre pas autant de possibilités que le corps des complexes, dans la mesure où il n'y a pas d'équivalent de la notion d'holomorphic dans le corps des quaternions car l'une des propriétés fondamentales est que toute fonction holomorphe ne dépende pas de la variable \bar{z} . La notion d'holomorphic étendue au corps des quaternions a cependant le grand désavantage que la fonction $f(q) = \bar{q}$ est holomorphe dans ce corps. Un analogue des fonctions holomorphes en 3D peut être vu dans les twisteurs qui servent en physique quantique, mais ceux-ci sont introduits à partir du corps des complexes et non des quaternions. Ainsi la théorie des potentiels en 3D est établie classiquement dans le corps des réels, et nous nous tenons, dans le cadre de ces travaux, à cette approche.

Comme nous l'avons écrit au chapitre 3, résoudre un problème d'élasticité isotrope sur un domaine élastique Ω (où l'on néglige les forces de volume et d'inerties) revient à trouver l'unique couple de champs $(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon})$ de contraintes et déformations, vérifiant des conditions en déplacement \mathbf{u}^d sur une partie de la frontière $\partial\Omega_u$ et en vecteur contrainte \mathbf{T}^d sur le restant de la frontière $\partial\Omega_\sigma$ et vérifiant le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(\underline{\sigma}) = \mathbf{0} & \text{Equation d'équilibre} \\ \underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon}) \cdot \underline{\mathbf{1}} + 2\mu \underline{\epsilon} & \text{Loi de comportement isotrope} \\ \underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla}(\mathbf{u}) + {}^t \underline{\nabla}(\mathbf{u})) & \text{Equation de compatibilité} \\ (x, y, z) \in \partial\Omega_u, \mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}_d(x, y, z) & \text{Conditions aux limites en déplacement} \\ (x, y, z) \in \partial\Omega_\sigma, \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_d(x, y, z) & \text{Conditions aux limites en contraintes} \end{array} \right. \quad (8.1)$$

Nous rappelons la définition de l'opérateur rotationnel

Définition 20 On appelle rotationnel d'un vecteur \mathbf{u} le vecteur $\text{rot } \mathbf{u}$:

$$\text{rot } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Il existe d'autres notations telles que : $\text{curl } \mathbf{u}$, $\nabla \wedge \mathbf{u}$ ou $\nabla \times \mathbf{u}$

De la même manière que l'existence du potentiel en contraintes d'Airy était principalement justifiée par le lemme de Poincaré, l'existence des potentiels 3D en déplacement se justifie par le théorème d'Helmholtz généralisé :

Théorème 12 Si Ω est un sous domaine de \mathbb{R}^3 (avec ou sans trous) et si \mathbf{u} est un champ vectoriel de classe C^1 sur Ω , alors il existe un potentiel vecteur \mathbf{Q} tel que $\text{div} \mathbf{Q} = 0$ (solénoïdale) et il existe un potentiel scalaire p tel que :

$$\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{Q} + \nabla p$$

Ainsi d'après ce théorème nous pouvons écrire le vecteur déplacement sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{Q} + \nabla p \quad (8.2)$$

Par ailleurs, un deuxième théorème portant le nom d'Helmholtz est utile :

Théorème 13 Si Ω est un sous domaine de \mathbb{R}^3 (avec ou sans trous) et si \mathbf{Q} est un champ vectoriel solénoïdal ($\text{div } \mathbf{Q} = 0$) de classe C^1 sur Ω , et si p est un champ scalaire de classe C^1 sur Ω , alors il existe quelque soit $\gamma \in \mathbb{R}$, un potentiel vecteur \mathbf{G} tel que :

$$\begin{cases} \text{div} \mathbf{G} = \gamma p \\ \text{rot } \mathbf{G} = -\mathbf{Q} \end{cases}$$

Ainsi nous avons en appliquant ce théorème à l'équation (8.2) en prenant un choix particulier pour γ on obtient :

$$\begin{cases} \text{div} \mathbf{G} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} p \\ \text{rot } \mathbf{G} = -\mathbf{Q} \end{cases} \quad (8.3)$$

Ainsi nous obtenons :

$$\mathbf{u} = -\text{rot rot } \mathbf{G} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \nabla \text{div} \mathbf{G} \quad (8.4)$$

Nous utilisons la formule d'analyse vectorielle :

$$\text{rot rot} = \nabla \text{div} - \Delta \quad (8.5)$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{u} = \Delta \mathbf{G} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \nabla \text{div} \mathbf{G} \quad (8.6)$$

Nous démontrons donc l'existence du potentiel vecteur de Galerkin \mathbf{F} portant sur les déplacements en posant :

$$\mathbf{F} = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \mathbf{G} = \frac{\mu}{1 - \nu} \mathbf{G} \quad (8.7)$$

Nous avons alors la relation classique :

$$2\mu \mathbf{u} = 2(1 - \nu) \Delta \mathbf{F} - \nabla \text{div} \mathbf{F} \quad (8.8)$$

De la même manière que dans le cas 2D, nous cherchons la condition pour que l'équation d'équilibre soit automatiquement vérifiée, ainsi nous écrivons l'équation de Navier qui n'est autre que l'équilibre dans lequel on a remplacé les contraintes par les déplacements via les lois de comportement de compatibilité :

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \nabla \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (8.9)$$

En réinjectant (8.2) dans l'équation de Navier nous obtenons :

$$\Delta [\text{rot } \mathbf{Q} + \nabla p] + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \nabla \text{div} (\text{rot } \mathbf{Q} + \nabla p) = 0 \quad (8.10)$$

Or nous avons les formules d'analyse vectorielle suivantes :

$$\text{div rot} = 0 \mid \nabla \text{div} \nabla = \Delta \nabla \quad (8.11)$$

Ce qui conduit à :

$$\Delta \left[\text{rot } \mathbf{Q} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \nabla p \right] = 0 \quad (8.12)$$

Ainsi en considérant l'équation (8.3) nous pouvons écrire :

$$\Delta \Delta \mathbf{G} = 0 \quad (8.13)$$

Or la définition du vecteur de Galerkin (8.7) nous donne immédiatement :

$$\Delta \Delta \mathbf{F} = 0 \quad (8.14)$$

Nous avons montré qu'il existe toujours un potentiel vecteur bi-harmonique portant sur les déplacements, ainsi toute solution du problème d'élasticité 3D peut s'écrire sous cette forme. Contrairement au cas 2D, où le double Laplacien permet une résolution très compacte grâce aux fonctions holomorphes, le double Laplacien en 3D est plus délicat à utiliser. C'est la raison pour laquelle un certain nombre de potentiels dérivés du vecteur de Galerkin sont souvent utilisés. On définit donc les potentiels de Papkovitch-Neuber, de la même manière que le début de la démonstration en 2D du résultat de Muskhelishvili (1977), ainsi on pose le potentiel vecteur harmonique suivant :

$$\boldsymbol{\psi} = -\frac{1}{2} \Delta \mathbf{F} \quad (8.15)$$

Ainsi, comme dans le cas 2D on calcule (avec $\mathbf{OM} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$) :

$$\Delta(\mathbf{OM} \cdot \boldsymbol{\psi}) = \Delta(x\psi_x + y\psi_y + z\psi_z) \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{OM} \cdot \boldsymbol{\psi}) = & 2\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + x \left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_x}{\partial z^2} \right) + \\ & 2\frac{\partial\psi_y}{\partial y} + y \left(\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_y}{\partial z^2} \right) + \\ & 2\frac{\partial\psi_z}{\partial z} + z \left(\frac{\partial^2\psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (8.17)$$

D'où :

$$\Delta(\mathbf{OM} \cdot \boldsymbol{\psi}) = 2\text{div} \boldsymbol{\psi} \quad (8.18)$$

En réinjectant (8.15) nous obtenons :

$$\Delta(\mathbf{OM} \cdot \boldsymbol{\psi}) = -\text{div} \Delta \mathbf{F} = -\Delta \text{div} \mathbf{F} \quad (8.19)$$

Par intégration on obtient :

$$\phi = -\text{div} \mathbf{F} - \mathbf{OM} \cdot \boldsymbol{\psi} \quad (8.20)$$

Où le potentiel ϕ est harmonique ($\Delta\phi = 0$). Nous avons montré qu'il existe toujours deux potentiels (l'un harmonique et l'autre bi-harmonique) permettant d'écrire n'importe quel problème d'élasticité. Ainsi nous pouvons écrire les déplacements sous forme des deux potentiels harmoniques de Papkovitch-Neuber :

$$2\mu\mathbf{u} = -4(1-\nu)\boldsymbol{\psi} + \nabla(\mathbf{OM} \cdot \boldsymbol{\psi} + \phi) \quad (8.21)$$

Il est souvent utile pour certains cas particuliers de décomposer les potentiels de Papkovitch-Neuber, afin de rendre plus aisée la recherche de solution. Les potentiels issus de cette décomposition sont connus sous le nom de potentiels de Boussinesq.

Solution A : En prenant $\boldsymbol{\psi} = 0$, le seul potentiel restant est ϕ et l'on obtient une solution d'élasticité sans variation de volume, c'est-à-dire $\text{div} \mathbf{u} = 0$. Nous reportons les déplacements et contraintes pour cette solution :

Déplacements Solution A					
Cartésien		Polaire		Sphérique	
$2\mu u_x$	$\frac{\partial\phi}{\partial x}$	$2\mu u_r$	$\frac{\partial\phi}{\partial r}$	$2\mu u_\rho$	$\frac{\partial\phi}{\partial \rho}$
$2\mu u_y$	$\frac{\partial\phi}{\partial y}$	$2\mu u_\theta$	$\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta}$	$2\mu u_\varphi$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial \varphi}$
$2\mu u_z$	$\frac{\partial\phi}{\partial z}$	$2\mu u_z$	$\frac{\partial\phi}{\partial z}$	$2\mu u_\theta$	$\frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial\phi}{\partial \theta}$

Contraintes diagonales Solution A					
Cartésien		Polaire		Sphérique	
σ_{xx}	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$	σ_{rr}	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$	$\sigma_{\rho\rho}$	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2}$
σ_{yy}	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$	$\sigma_{\varphi\varphi}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$
σ_{zz}	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$	σ_{zz}	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\cot \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$

Contraintes de cisaillement Solution A					
Cartésien		Polaire		Sphérique	
σ_{xy}	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$	$\sigma_{r\theta}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$	$\sigma_{\rho\varphi}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$
σ_{xz}	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}$	σ_{rz}	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z}$	$\sigma_{\rho\theta}$	$\frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$
σ_{yz}	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}$	$\sigma_{\theta z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z}$	$\sigma_{\varphi\theta}$	$\frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi \partial \theta} - \frac{\cot \varphi}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$

Solution B : On décompose ensuite les potentiels de Papkovitch-Neuber en projetant ψ sur les axes cartésiens et en considérant $\phi = 0$, nous posons donc une fonction harmonique γ telle que $\psi = \gamma e_z$. (On obtiendrait les solutions C et D en prenant $\psi = \gamma e_x$ et $\psi = \gamma e_y$). Nous reportons les déplacements et contraintes pour cette solution :

Déplacements Solution B					
Cartésien		Polaire		Sphérique	
$2\mu u_x$	$z \frac{\partial \omega}{\partial x}$	$2\mu u_r$	$z \frac{\partial \omega}{\partial r}$	$2\mu u_\rho$	$\rho \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \rho} - (3 - 4\nu)\omega \cos \varphi$
$2\mu u_y$	$z \frac{\partial \omega}{\partial y}$	$2\mu u_\theta$	$\frac{z}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$	$2\mu u_\varphi$	$\cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + (3 - 4\nu)\omega \sin \varphi$
$2\mu u_z$	$z \frac{\partial \omega}{\partial z} - (3 - 4\nu)\omega$	$2\mu u_z$	$z \frac{\partial \omega}{\partial z} - (3 - 4\nu)\omega$	$2\mu u_\theta$	$\cot \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$

Contraintes diagonales Solution B					
Cartésien		Polaire		Sphérique	
σ_{xx}	$z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - 2\nu \frac{\partial \omega}{\partial z}$	σ_{rr}	$z \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \omega}{\partial z}$	$\sigma_{\rho\rho}$	$\rho \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \sin \varphi$
σ_{yy}	$z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2\nu \frac{\partial \omega}{\partial z}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$\frac{z}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{z}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} - 2\nu \frac{\partial \omega}{\partial z}$	$\sigma_{\varphi\varphi}$	$\frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + (1 - 2\nu) \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{2(1 - \nu) \sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}$
σ_{zz}	$z \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \omega}{\partial z}$	σ_{zz}	$z \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \omega}{\partial z}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$(1 - 2\nu) \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{2\nu}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + \frac{\cot \varphi}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2}$

Contraintes de cisaillement Solution B					
Cartésien		Polaire		Sphérique	
σ_{xy}	$z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$	$\sigma_{r\theta}$	$\frac{z}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial \theta} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$	$\sigma_{\rho\varphi}$	$(1 - 2\nu) \sin \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \cos \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{2(1 - \nu) \cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}$
σ_{xz}	$z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \omega}{\partial x}$	σ_{rz}	$z \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \omega}{\partial r}$	$\sigma_{\rho\theta}$	$\cot \varphi \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{2(1 - \nu) \cot \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$
σ_{yz}	$z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \omega}{\partial y}$	$\sigma_{\theta z}$	$\frac{z}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta \partial z} - \frac{1 - 2\nu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$	$\sigma_{\varphi\theta}$	$\frac{\cot \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{2(1 - \nu)}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho \sin^2 \varphi} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$

Solution E : Bien que les solutions A, B, C et D correspondent à la décomposition des potentiels de Papkovitch-Neuber, il est parfois utile d'introduire un autre potentiel. On pose une fonction Ψ harmonique (solution E, sans variation de volume) telle que $\psi = -1/(2(1 - \nu)) \mathbf{rot}(e_z \Psi)$ et $\phi = -\mathbf{OM} \cdot \psi$ (pour annuler le gradient dans l'expression du vecteur de Galerkin). Les combinaisons des solutions A, B et E permettent d'obtenir une description complète (démontrée par Barber (2003)), aussi générale que le vecteur de Galerkin, ces trois solutions sont utilisées au chapitre 9 pour la détermination de certains termes. Cela est plus économique que de combiner quatre solutions A, B, C et D. Il n'y a pas unicité de l'écriture en potentiel. Nous reportons les déplacements et contraintes pour la solution E :

Déplacements Solution E					
Cartésien		Polaire		Sphérique	
$2\mu u_x$	$2 \frac{\partial \Psi}{\partial y}$	$2\mu u_r$	$\frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$	$2\mu u_\rho$	$\frac{2}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$
$2\mu u_y$	$-2 \frac{\partial \Psi}{\partial x}$	$2\mu u_\theta$	$-2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}$	$2\mu u_\varphi$	$\frac{2 \cot \varphi}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$
$2\mu u_z$	0	$2\mu u_z$	0	$2\mu u_\theta$	$-2 \sin \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{2 \cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$

Contraintes diagonales Solution E					
Cartésien		Polaire		Sphérique	
σ_{xx}	$2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$	σ_{rr}	$\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$	$\sigma_{\rho\rho}$	$\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$
σ_{yy}	$-2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$-\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$	$\sigma_{\varphi\varphi}$	$\frac{2 \cot \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi \partial \theta} - \frac{2 \cot^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$
σ_{zz}	0	σ_{zz}	0	$\sigma_{\theta\theta}$	$\frac{2}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{2 \cot \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi \partial \theta}$

Contraintes de cisaillement Solution E					
Cartésien		Polaire		Sphérique	
σ_{xy}	$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$	$\sigma_{r\theta}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}$	$\sigma_{\rho\varphi}$	$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{\cot \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{2 \cot \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$
σ_{xz}	$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z}$	σ_{rz}	$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial z}$	$\sigma_{\rho\theta}$	$\frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \sin \varphi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} - \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{2 \cos \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}$
σ_{yz}	$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z}$	$\sigma_{\theta z}$	$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}$	$\sigma_{\varphi\theta}$	$\frac{\cot \varphi}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$

Solution F : On définit aussi une solution F servant pour les problèmes sans cisaillement en $z = 0$, en posant un potentiel f , qui combine les solutions A et B, tel que $\gamma = \partial f / \partial z$ et $\phi = (1 - 2\nu)f$. Nous reportons les déplacements et contraintes pour cette solution :

Déplacements Solution F					
Cartésien			Polaire		
$2\mu u_x$	$(1 - 2\nu) \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$		$2\mu u_r$	$(1 - 2\nu) \frac{\partial f}{\partial r} + z \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z}$	
$2\mu u_y$	$(1 - 2\nu) \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$		$2\mu u_\theta$	$\frac{1 - 2\nu}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{z}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial z}$	
$2\mu u_z$	$-2(1 - \nu) \frac{\partial f}{\partial z} + z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$		$2\mu u_z$	$-2(1 - \nu) \frac{\partial f}{\partial z} + z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	

Contraintes diagonales Solution F					
Cartésien			Polaire		
σ_{xx}	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\nu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}$		σ_{rr}	$(1 - 2\nu) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z \frac{\partial^3 f}{\partial r^2 \partial z}$	
σ_{yy}	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + z \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}$		$\sigma_{\theta\theta}$	$-(1 - 2\nu) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z \frac{\partial^3 f}{\partial r^2 \partial z} - z \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}$	
σ_{zz}	$-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}$		σ_{zz}	$-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}$	

Contraintes de cisaillement Solution F					
Cartésien			Polaire		
σ_{xy}	$(1 - 2\nu) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$		$\sigma_{r\theta}$	$-\frac{z}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial z} + \frac{z}{r} \frac{\partial^3 f}{\partial r \partial \theta \partial z} + \frac{1 - 2\nu}{r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$	
σ_{xz}	$z \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}$		σ_{rz}	$z \frac{\partial^3 f}{\partial r \partial z^2}$	
σ_{yz}	$z \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}$		$\sigma_{\theta z}$	$\frac{z}{r} \frac{\partial^3 f}{\partial \theta \partial z^2}$	

Solution G : De même on définit une solution G libre de traction en $z = 0$ en posant un potentiel χ , qui combine les solutions A et B, tel que $\gamma = \partial\chi/\partial z$ et $\phi = 2(1-\nu)\chi$. Nous reportons les déplacements et contraintes pour cette solution :

Déplacements Solution G					
Cartésien			Polaire		
$2\mu u_x$	$2(1-\nu)\frac{\partial\chi}{\partial x} + z\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial z}$		$2\mu u_r$	$2(1-\nu)\frac{\partial\chi}{\partial r} + z\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z}$	
$2\mu u_y$	$2(1-\nu)\frac{\partial\chi}{\partial y} + z\frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial z}$		$2\mu u_\theta$	$\frac{2(1-\nu)}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \frac{z}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta\partial z}$	
$2\mu u_z$	$-(1-2\nu)\frac{\partial\chi}{\partial z} + z\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}$		$2\mu u_z$	$-(1-2\nu)\frac{\partial\chi}{\partial z} + z\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}$	

Contraintes diagonales Solution G					
Cartésien			Polaire		
σ_{xx}	$2(1-\nu)\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} - 2\nu\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + z\frac{\partial^3\chi}{\partial x^2\partial z}$		σ_{rr}	$2(1-\nu)\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} - 2\nu\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + z\frac{\partial^3\chi}{\partial r^2\partial z}$	
σ_{yy}	$2(1-\nu)\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} - 2\nu\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + z\frac{\partial^3\chi}{\partial y^2\partial z}$		$\sigma_{\theta\theta}$	$-2(1-\nu)\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + \frac{z}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z} + \frac{z}{r^2}\frac{\partial^3\chi}{\partial\theta^2\partial z}$	
σ_{zz}	$z\frac{\partial^3\chi}{\partial z^3}$		σ_{zz}	$z\frac{\partial^3\chi}{\partial z^3}$	

Contraintes de cisaillement Solution G					
Cartésien			Polaire		
σ_{xy}	$2(1-\nu)\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} + z\frac{\partial^3\chi}{\partial x\partial y\partial z}$		$\sigma_{r\theta}$	$\frac{2(1-\nu)}{r}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right) + \frac{z}{r}\frac{\partial^3\chi}{\partial r\partial\theta\partial z} - \frac{z}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta\partial z}$	
σ_{xz}	$z\frac{\partial^3\chi}{\partial x\partial z^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial z}$		σ_{rz}	$z\frac{\partial^3\chi}{\partial r\partial z^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z}$	
σ_{yz}	$z\frac{\partial^3\chi}{\partial y\partial z^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial z}$		$\sigma_{\theta z}$	$\frac{z}{r}\frac{\partial^3\chi}{\partial\theta\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta\partial z}$	

Une autre formulation potentielle complète (tout problème d'élasticité peut s'écrire sous cette forme) s'exprime en terme d'un vecteur de Galerkin particulier $\mathbf{F} = -\Phi\mathbf{e}_z$, ainsi Φ est bi-harmonique et d'une Solution E (potentiel Ψ harmonique). Cette représentation est utilisée au chapitre 9, pour la détermination des termes courants. Nous avons en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} 2\mu u_r = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \\ 2\mu u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial r} \\ 2\mu u_z = -\left[2(1-\nu)\nabla_{(r,\theta)}^2\Phi + (1-2\nu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right] \end{cases} \quad (8.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = -\nu \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right] \\ \sigma_{r\theta} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right) \right] \\ \sigma_{rz} = \left[-(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \nabla_{(r,\theta)}^2 + \nu \frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2} \right] \Phi + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial z} \\ \sigma_{\theta\theta} = -\nu \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^2 \partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right] \\ \sigma_{\theta z} = \left[-(1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla_{(r,\theta)}^2 + \frac{\nu}{r} \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial z^2} \right] \Phi - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \\ \sigma_{zz} = - \left[(2-\nu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 - \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right] \Phi \end{array} \right. \quad (8.23)$$

8.2. Equation de la chaleur

Il est trivial de reprendre la démonstration 2D du chapitre 3 pour l'adapter en 3D, il suffit d'ajouter la dérivée seconde par rapport à z dans l'équation (3.16) pour obtenir l'équation de la chaleur d'un mobile tournant à vitesse constante avec des paramètres thermiques indépendants de la température :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (8.24)$$

De même que pour l'analyse bidimensionnelle, nous établissons une famille de solution de cette équation en développant en série de Fourier selon θ et en séparant les variables. En effet, la solution est à chaque instant 2π -périodique selon θ et peut donc être développée en série de Fourier (cf chapitre 2) :

$$T(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n(r, z, t) \exp(in\theta) \quad (8.25)$$

Le n ième coefficient de Fourier est recherché comme une fonction à variables séparables :

$$F_n(r, z, t) = a_n(r) b_n(z) c_n(t) \quad (8.26)$$

D'où en reportant dans (8.24) :

$$b_n(z) c_n(t) \left(a_n''(r) + \frac{1}{r} a_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} a_n(r) \right) + a_n(r) b_n''(z) c_n(t) = \frac{a_n(r) b_n(z)}{D} (c_n'(t) + i\omega n c_n(t)) \quad (8.27)$$

La condition $T(r, \theta, t) > 0$ est vérifiée (T exprimée en Kelvin) donc nous pouvons diviser par T , ce qui donne :

$$\frac{1}{a_n(r)} \left(a_n''(r) + \frac{1}{r} a_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} a_n(r) \right) + \frac{b_n''(z)}{b_n(z)} = \frac{1}{D c_n(t)} (c_n'(t) + i\omega n c_n(t)) \quad (8.28)$$

Les trois termes égaux sont chacun des fonctions d'une seule variable (indépendantes les unes des autres), il existe donc deux nombres complexes C_1 et C_2 tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a_n(r)} \left(a_n''(r) + \frac{1}{r} a_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} a_n(r) \right) = C_1 - \frac{b_n''(z)}{b_n(z)} = C_2 \\ \frac{1}{D c_n(t)} (c_n'(t) + i\omega n c_n(t)) = C_1 \end{array} \right. \quad (8.29)$$

Ainsi :

$$\begin{cases} a_n(r) = J_n(\sqrt{-C_2}r) \\ b_n(z) = \exp(\sqrt{C_1 - C_2}z) \\ c_n(t) = \exp((DC_1 - i\omega n)t) \end{cases} \quad (8.30)$$

où J_n est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n définie (cf chapitre 2) pour un argument complexe.

En introduisant $\tau = -1/(DC_1 - i\omega n)$ et $\alpha = \sqrt{C_1 - C_2}$ nous obtenons la solution de (8.24) suivante :

$$\gamma J_n \left(\sqrt{\frac{1}{D\tau} - \frac{i\omega n}{D} + \alpha^2} r \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \exp(in\theta) \exp(\alpha z) \quad (8.31)$$

où γ est un nombre complexe arbitraire.

CHAPITRE IX

ÉVALUATION DES CONTRAINTES DE CONTACT EN 3D

Ce chapitre est adapté d'un article soumis à publication dans International Journal of Solids and Structures (Weisz-Patrault et al. (2013b)). Nous étendons la méthode inverse élastique isotherme du chapitre 4 dans le cas tridimensionnel. La solution développée permet d'évaluer le tenseur des contraintes complet dans tout le cylindre, et en particulier les contraintes de contact dans l'emprise. L'idée principale est d'insérer plusieurs capteurs de déformation sous la surface du cylindre, alignés selon son axe. Si au milieu du cylindre, les déformations planes constituent une excellente approximation, dans le reste du cylindre en revanche des effets tridimensionnels (flexion, hétérogénéité des contraintes de contact selon l'axe, et effet de bord près des rives de la bande) conduisent à considérer un problème non simplifié. Ce chapitre est de nature plus théorique que les précédents, dans la mesure où l'insertion de plusieurs capteurs sous la surface n'est pas encore envisagée industriellement. La solution inverse que nous développons dans ce chapitre repose sur une formulation du problème d'élasticité isotrope isotherme, en potentiels de déplacement harmonique et bi-harmonique, développée au chapitre 8. Des développements de ces potentiels en série de Fourier seront la base des démonstrations. Par ailleurs, les contraintes mesurées seront également développées en double série de Fourier (selon l'axe z et l'angle θ) et l'identification des paramètres inconnus des séries, pour les potentiels, se fait grâce à des matrices de taille 3×3 . Par ailleurs de même que dans le cas bidimensionnel, les fft seront utilisées pour les calculs d'intégrales. Ainsi des temps de calculs réduits sont obtenus (0.5 seconde affichée par Scilab 5.3 pour le calcul de la double fft pour un processeur 2.8 GHz).

9.1. Introduction

Comme nous l'avons précisé au chapitre 4, les conditions de laminage sont de plus en plus sévères en termes de vitesse de rotation, de taux de réduction et de dureté des nuances des aciers laminés. Ces conditions de plus en plus sévères s'accompagnent de critères de qualité pour le produit de plus en plus exigeants, qu'il s'agisse de l'épaisseur, de la planéité ou des défauts de surface. C'est la raison pour laquelle un très grand nombre de modèles numériques prédictifs tentent d'approcher de plus en plus finement la complexité du procédé. Ces modèles couplant la bande thermo-visco-plastique et le cylindre thermoélastique sont tous tridimensionnels et ont été cités dans le chapitre d'introduction 1. Le caractère 3D du problème est essentiel pour les défauts de planéité (par exemple). En effet, ces derniers proviennent de la différence entre le profil géométrique de la bande entrant dans l'emprise et celui de l'entrefer, qui résulte des déformations des cylindres de travail. La solution analytique inverse tridimensionnelle, que nous développons dans ce chapitre, permet d'évaluer les contraintes de contact dans l'emprise, responsables de ces déformations des cylindres et donc du profil d'entrefer (non homogène selon l'axe du cylindre). La motivation d'une solution 3D par rapport à l'application de plusieurs méthodes inverses 2D sur différentes tranches de cylindre à différentes positions axiales (selon z) tient surtout au fait que les contraintes sont équilibrées aux extrémités du cylindre (ce qui ne peut pas être pris en compte dans une méthode 2D). De plus si l'approximation des déformations planes est très bien vérifiée au centre, celle-ci tombe en défaut dans le reste du cylindre du fait de la flexion de celui-ci. Une bonne précision dans l'évaluation inverse des contraintes de contact sera donc atteinte plus facilement avec un modèle vraiment tridimensionnel (c'est-à-dire prenant en compte la dimension z dans la résolution des équations) qu'avec un modèle bidimensionnel utilisé tranche par tranche.

Nous ne refaisons pas la revue bibliographique des méthodes inverses élastiques bidimensionnelles faite au chapitre 4. Dans le cas tridimensionnel, compte tenu que ces sujets industriels sont par culture souvent abordés par

des algorithmes numériques itératifs, les temps de calcul et les disponibilités en mémoire ont considérablement limités les tentatives pour le développement de méthodes inverses élastiques adaptées au laminage, comme le mentionne Loulou and Artioukhine (2006) dans le cadre d'une inversion thermique 3D sur un cylindre creux. La présente solution inverse tridimensionnelle ne peut donc pas être comparée avec un autre algorithme.

TABLE 9.1 – Nomenclature

R_s	Rayon du cylindre	$\sigma_{(..)}^*$	Contraintes dues à ϕ^*, γ^* et ψ^*
R_m	Rayon de mesure	$\sigma_{(..)}^m$	Contraintes mesurées
L	Demi-longueur du cylindre	$\sigma_{n,p}^{(..)}$	Coefficient de Fourier de $\sigma_{(..)}$
l	Demi-longueur de la bande	$S_{n,p}^{(..)}$	Coefficients de Fourier de $\sigma_{(..)}^m$
E	Module d'Young du cylindre	$\Phi_p^n, \tilde{\Phi}_p^n$	Coefficients de Φ
ν	Coefficient de Poisson	Ψ_p^n	Coefficients de Ψ
λ, μ	Coefficients de Lamé	A_n, B_n, C_n	Coefficients de ϕ, γ et ψ
r, θ, z	Coordonnées cylindriques	α_k	Coefficients de ϕ^*, γ^* et ψ^* pour $(k \in \{1; 2; 3; 4\})$
e_r, e_θ, e_z	Vecteurs unitaires cylindriques	N	Nombre de troncature selon n
x, y, z	Coordonnées cartésiennes	P	Nombre de troncature selon p
e_x, e_y, e_z	Vecteurs unitaires cartésiens	$M^{n,p}(r)$	Matrices de taille 3×3
ω	Vitesse de rotation	$\kappa_{n,p}$	Conditionnement de $M^{n,p}(r)$
f	Fréquence d'acquisition des mesures	$\delta_{n,p}$	Erreur moyenne dans le calcul de $S_{n,p}^{(..)}$
$(..)$	$rr, r\theta, rz, \theta\theta, \theta z$ or zz	T^+	Résultante de traction en $z = L$
u_r	Déplacement radial	V_x^+, V_y^+	Résultantes de cisaillement
u_θ	Déplacement tangentiel	M_x^+, M_y^+, M_z^+	Moments résultants
u_z	Déplacement axial	$\epsilon_{(..)}$	Erreur de reconstruction
Φ	Potentiel bi-harmonique	N_z^m	Nombre de capteurs le long de l'axe
Ψ	Potentiel harmonique	N_z^i	Nombre de points d'interpolation selon z
ϕ, γ, ψ	Potentiels harmoniques	N_θ^n	Nombre de points de mesures selon θ sur un tour
ϕ^*, γ^*, ψ^*	Potentiels harmoniques	N_θ^i	Nombre de points d'interpolation selon θ
$\sigma_{(..)}^T$	Contraintes totales		
$\sigma_{(..)}$	Contraintes dues à Φ, Ψ, ϕ, γ et ψ		

9.2. Choix de la méthode analytique

En élasticité tridimensionnelle, plusieurs approches existent. Une solution très générale pour le problème de Neuman (vecteur contrainte imposé à la surface) pour un corps élastique est proposée dans le livre de Bui (2006). La solution repose sur le tenseur de Kelvin-Somigliana (équivalent au tenseur de Green pour l'élastostatique) et sur un potentiel vecteur de simple couche donnant lieu à une équation intégrale qui a été résolue analytiquement sous forme de séries absolument convergentes par Pham (1967). Bien que la solution soit exprimée analytiquement, elle n'est pas référencée dans le chapitre 8 car les intégrales dans la série ne peuvent être déterminées que numériquement (base des éléments de frontière). Dans le cas présent on aurait pu espérer que la géométrie simple permette une évaluation analytique de ces intégrales, mais l'intégrande est trop complexe. Cette approche n'a donc pas été utilisée.

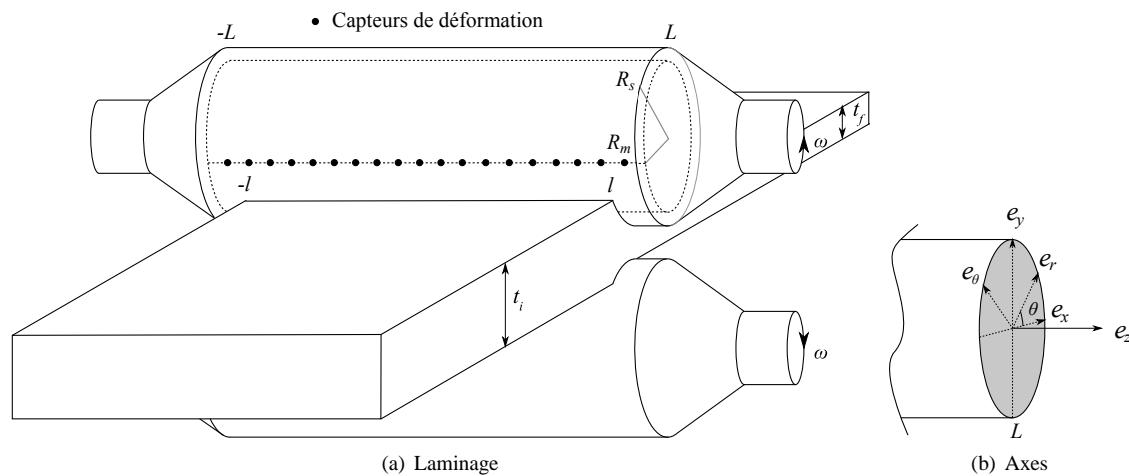
Par ailleurs, une solution exacte analytique pour le problème direct d'un cylindre soumis à des chargements arbitraires (en vecteur contrainte) a été proposée par Chau and Wei (2000). Une revue importante de ces problèmes sur les cylindres est présentée. Plusieurs solutions exactes ou approximatives ont été formulées pour des chargements particuliers. Pour les chargements axisymétriques, la fonction en contrainte de Love (1944) a été utilisée par Saito (1952) dans le cadre d'une solution générale qui fait intervenir des fonctions de Bessel d'ordres 0 et 1. Avec une approche similaire, une étude d'un cylindre avec des chargements paraboliques sur la surface du cylindre (y compris sur les bords plats), a été menée par Ogaki and Nakajima (1983). Pour les chargements non axisymétriques, des approximations simples, pour le problème du cylindre chargé par des forces ponctuelles diamétralement opposées, ont été proposées par Wijk (1980). Une approche plus générale de ce même problème a été publiée par Chau (1998).

La solution générale du cylindre chargé arbitrairement en contraintes de Chau and Wei (2000) repose sur deux potentiels de déplacements développés en double séries de Fourier (trigonométrique et hyperbolique) et séries de Fourier-Bessel (fonctions de Bessel et de fonctions de Bessel modifiées de première espèce). Cette solution est particulièrement compliquée dans la mesure où les séries hyperboliques sont de nouveau développées en série trigonométriques, et les séries de fonctions de Bessel modifiées sont quant à elles développées à nouveau en séries de Bessel. Les sommes sont tronquées pour permettre d'identifier les paramètres inconnus en inversant une grande matrice. Cela revient à approximer directement les chargements arbitraires à la surface. Cette solution aurait pu servir de base à la construction de la solution inverse 3D, que nous cherchons à établir. Les coefficients des séries mises en jeu auraient été identifiés grâce au développement en série des contraintes au rayon R_m .

Cependant cette méthode n'a pas été choisie. La raison principale en est que la solution inverse que nous proposons d'établir est sous-déterminée par rapport au problème complet, que résolvent Chau and Wei (2000). En effet, la mesure des contraintes est faite sous la surface du cylindre à différentes positions sur l'axe. En revanche aucune mesure n'est faite sur les bords du cylindre car ces derniers ne sont pas accessibles à cause d'une part de la forme particulière du cylindre de travail et d'autre part à cause des moteurs, (cf figure 9.1(a)). Ainsi le vecteur contrainte local est inconnu aux extrémités du cylindre, définies par $z = \pm L$. Nous ne pouvons donc prendre en compte que les conditions faibles dues à l'équilibre général.

Cependant le principe de Saint-Venant (1855) assure que les perturbations ne se propagent que très peu entre la solution où le vecteur contrainte serait connu localement et celle où seul le torseur résultant est connu. La solution de Chau and Wei (2000) traite des chargements locaux aux extrémités du cylindre, or les complexités que nous avons évoquées plus haut ne sont introduites que dans cet unique but. Il est donc assez inopportun de l'utiliser directement puisque notre solution ne prend pas en compte de tels chargements. Par ailleurs la solution de Chau and Wei (2000) est identifiée en inversant une très grande matrice, ce qui est dans le contexte des méthodes inverses extrêmement risqué du fait du mauvais conditionnement de celle-ci. Ainsi cette solution ne semble pas adaptée au problème inverse, que nous cherchons à traiter.

C'est la raison pour laquelle une troisième approche, plus simple, a été développée.



9.3. Principes de la méthode inverse

9.3.1. Condition

Les différents capteurs de déformation à fibres optiques sont insérés selon l'axe du cylindre au rayon R_m . Nous supposons que nous pouvons en insérer suffisamment pour décrire correctement l'évolution des champs selon le grand axe. La question du nombre de capteurs nécessaires est étudiée dans ce chapitre. La rotation du cylindre permet d'obtenir une mesure sur toute la surface de rayon R_m pour $-L \leq z \leq L$ (quoique cette mesure ne soit pas continue, mais nous interpolons le signal par des fonctions cubiques voir même simplement linéaires). Comme dans le chapitre 4, ce type de montage revient à supposer que les contraintes de contact dans l'emprise varient beaucoup plus lentement que la durée d'un tour. Nous répétons qu'aucune mesure n'est faite au niveau des surfaces $z = \pm L$, car celles-ci sont inaccessibles. Les contraintes mesurées sont notées σ_{rr}^m , $\sigma_{r\theta}^m$ et σ_{rz}^m . Ces trois

signaux sont développés en double série de Fourier selon θ et z . Deux potentiels en déplacement Ψ et Φ introduits au chapitre 8, qui sont respectivement harmonique et bi-harmonique, sont utilisés pour résoudre le problème. Les deux potentiels sont recherchés sous forme de double série de Fourier, il suffit donc d'identifier les paramètres inconnus de ces développements pour obtenir la solution du problème élastique. Cette identification est faite grâce aux contraintes mesurées au rayon R_m . La condition à vérifier est donc :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(R_m, \theta, z) = \sigma_{rr}^m(\theta, z) \\ \sigma_{r\theta}(R_m, \theta, z) = \sigma_{r\theta}^m(\theta, z) \\ \sigma_{rz}(R_m, \theta, z) = \sigma_{rz}^m(\theta, z) \end{cases} \quad (9.1)$$

L'identification, détaillée à la section 9.8, est particulièrement simple pour un problème tridimensionnel. Au lieu d'inverser un système linéaire de grande taille, la solution analytique est obtenue grâce à l'inversion de matrices de taille 3×3 . Par ailleurs, l'identification des termes pour $p = 0$ si p est l'indice de sommation de l'exponentielle dépendant de la variable z , se fait différemment. Nous utilisons, dans ce cas, trois potentiels harmoniques de Boussinesq ϕ , γ et ψ (eux aussi introduits au chapitre 8), que nous recherchons sous la forme polynomiale que nous avons discutée au chapitre 2. L'identification de ces derniers potentiels est détaillée à la section 9.7.

9.3.2. Equilibre général

D'autre part, bien que la solution ne permette pas de vérifier des conditions locales sur les bords (en $z = \pm L$), nous pouvons nous intéresser à la condition faible correspondante. En effet, l'équilibre global est automatiquement vérifié par la solution en potentiels, cependant il peut être intéressant de répartir les résultantes (conditions faibles) des vecteurs contraintes sur les faces $z = \pm L$ de sorte que le système soit équilibré globalement comme une poutre sur deux appuis. Pour ce faire nous introduisons trois nouveaux potentiels harmoniques de Boussinesq notés ϕ^* , γ^* et ψ^* . Le tenseur de contrainte relatif à ces potentiels est noté $\sigma_{(..)}^*$ (où $(..)$ désigne rr , $r\theta$, rz , $\theta\theta$, θz et zz). De manière évidente ce tenseur doit vérifier la condition suivante pour ne pas altérer la solution des autres potentiels que nous avons introduits à la section précédente :

$$\sigma_{rr}^*(R_m, \theta, z) = \sigma_{r\theta}^*(R_m, \theta, z) = \sigma_{rz}^*(R_m, \theta, z) = 0 \quad (9.2)$$

Nous détaillons à la section 9.9 les conditions particulières à imposer aux potentiels ϕ^* , γ^* et ψ^* , et l'extraction des coefficients impliqués.

9.3.3. Contraintes de contact

Finalement le champ de contrainte élastique total noté $\sigma_{(..)}^T$ (où T signifie total) est obtenu en sommant $\sigma_{(..)}$ et $\sigma_{(..)}^*$. La solution est prolongée par continuité vers la surface (en R_s) pour obtenir les contraintes de contact.

9.4. Expression des mesures

Les trois signaux mesurés au rayon R_m sont notés $\sigma_{(..)}^m(\theta, z)$ (où $(..)$ désigne rr , $r\theta$ et rz). Nous développons en double série de Fourier :

$$\sigma_{(..)}^m(\theta, z) = \sum_{n=-N}^N \sum_{p=-P}^P S_{n,p}^{(..)} \exp\left(i\frac{p\pi}{L}z\right) \exp(in\theta) \quad (9.3)$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par l'intégrale double :

$$S_{n,p}^{(..)}(z) = \frac{1}{4\pi L} \int_0^{2\pi} \int_{-L}^L \sigma_{(..)}^m(\theta, z) \exp\left(-i\frac{p\pi}{L}z\right) \exp(-in\theta) d\theta dz \quad (9.4)$$

9.5. Condition

Considérant que nous avons développé les mesures en série de Fourier (9.3), il est évidemment approprié de chercher le tenseur des contraintes dans le cylindre sous la même forme ((..) désignant rr , $r\theta$, rz , $\theta\theta$, θz ou zz) :

$$\sigma_{(..)}(r, \theta, z) = \sum_{n=-N}^N \sum_{p=-P}^P \sigma_{n,p}^{(..)}(r) \exp\left(i \frac{p\pi}{L} z\right) \exp(in\theta) \quad (9.5)$$

Les coefficients $S_{n,p}^{(..)}$ étant connus (cf section.9.4), la condition (9.1) identifiant $\sigma_{(..)}(R_m, \theta, z)$ et $\sigma_{(..)}^m(\theta, z)$ (ou (..) désigne rr , $r\theta$ et rz) devient simplement ($-N \leq n \leq N$ and $-P \leq p \leq P$) :

$$\sigma_{n,p}^{(..)}(R_m) = S_{n,p}^{(..)} \quad (9.6)$$

Les sections 9.6 et 9.7 traitent cette dernière condition (9.6) respectivement pour $p \neq 0$ et pour $p = 0$. Finalement l'identification est faite à la section 9.8.

9.6. Modèle bi-harmonique, termes courants

9.6.1. Potentiels en déplacements

Nous introduisons deux potentiels portant sur les déplacements (introduits au chapitre 8) Ψ et Φ , respectivement harmonique et bi-harmonique :

$$\begin{cases} 2\mu u_r = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ 2\mu u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ 2\mu u_z = - \left[2(1-\nu) \nabla_{(r,\theta)}^2 \Phi + (1-2\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \end{cases} \quad (9.7)$$

où :

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi = 0 \\ \nabla^4 \Phi = \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \end{cases} \quad (9.8)$$

et $\nabla_{(r,\theta)}^2$ est l'opérateur laplacien en deux dimensions portant sur (r, θ) ¹ et ∇^2 est l'opérateur laplacien en trois dimensions². Il est facile de vérifier que $\Psi(r, \theta, z)$ et $\Phi(r, \theta, z)$ définis par (9.9) sont respectivement harmonique et bi-harmonique, comme nous l'avons présenté au chapitre 2.

$$\begin{cases} \Psi(r, \theta, z) = \sum_{n=-N}^N \sum_{\substack{p=-P \\ p \neq 0}}^P \left(\frac{p\pi}{L}\right)^{-2} \Psi_p^n \left(\frac{p\pi}{L} r\right) \exp\left(i \frac{p\pi}{L} z\right) \exp(in\theta) \\ \Phi(r, \theta, z) = \sum_{n=-N}^N \sum_{\substack{p=-P \\ p \neq 0}}^P \left(\frac{p\pi}{L}\right)^{-3} \left[\Phi_p^n \left(\frac{p\pi}{L} r\right) I_n' \left(\frac{p\pi}{L} r\right) + \tilde{\Phi}_p^n I_n \left(\frac{p\pi}{L} r\right) \right] \exp\left(i \frac{p\pi}{L} z\right) \exp(in\theta) \end{cases} \quad (9.9)$$

où I_n est la fonction de Bessel modifiée d'ordre n (on pourra se référer à la définition du chapitre 2).

Il convient donc d'identifier les coefficients inconnus suivants :

$$\forall n \in \llbracket -N, N \rrbracket, \forall p \in \llbracket -P, P \rrbracket^*, \left\{ \Psi_p^n; \Phi_p^n; \tilde{\Phi}_p^n \right\} \quad (9.10)$$

-
1. Opérateur de Laplace (r, θ) : $\nabla_{(r,\theta)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$
 2. Opérateur de Laplace : $\nabla^2 = \nabla_{(r,\theta)}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

9.6.2. Champ de contrainte

Le champ de contrainte associé aux potentiels (9.9) est exprimé en fonction de Φ et Ψ (cf chapitre 8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = -\nu \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right] \\ \sigma_{r\theta} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right) \right] \\ \sigma_{rz} = \left[-(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \nabla_{(r,\theta)}^2 + \nu \frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2} \right] \Phi + \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial z} \\ \sigma_{\theta\theta} = -\nu \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^2 \partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right] \\ \sigma_{\theta z} = \left[-(1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla_{(r,\theta)}^2 + \frac{\nu}{r} \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial z^2} \right] \Phi - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \\ \sigma_{zz} = - \left[(2-\nu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 - \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right] \Phi \end{array} \right. \quad (9.11)$$

En écrivant les équations (9.11) et en prenant en compte (9.5), nous obtenons le système d'équations suivant où l'on a posé $\zeta_p = p\pi r/L$ et $p \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n,p}^{rr}(r) = i \left[\Phi_p^n \left(-I_n(\zeta_p) \left(2\nu - 1 + \left(\frac{n}{\zeta_p} \right)^2 \right) + I_n'(\zeta_p) \left(\zeta_p + \frac{n^2}{\zeta_p} \right) \right) + \tilde{\Phi}_p^n I_n''(\zeta_p) \right. \\ \quad \left. + \Psi_p^n n \left(\frac{I_n'(\zeta_p)}{\zeta_p} - \frac{I_n(\zeta_p)}{\zeta_p^2} \right) \right] \\ \sigma_{n,p}^{r\theta}(r) = -n \left(\Phi_p^n I_n''(\zeta_p) + \tilde{\Phi}_p^n \left(-\frac{I_n(\zeta_p)}{\zeta_p^2} + \frac{I_n'(\zeta_p)}{\zeta_p} \right) \right) - \Psi_p^n \left(\left(\frac{n^2}{\zeta_p^2} + \frac{1}{2} \right) I_n(\zeta_p) - \frac{I_n'(\zeta_p)}{\zeta_p} \right) \\ \sigma_{n,p}^{rz}(r) = -\Phi_p^n \left(\left(\frac{n^2}{\zeta_p} + \zeta_p \right) I_n(\zeta_p) + 2(1-\nu) I_n'(\zeta_p) \right) - \tilde{\Phi}_p^n I_n'(\zeta_p) - \Psi_p^n \frac{n}{2\zeta_p} I_n(\zeta_p) \\ \sigma_{n,p}^{\theta\theta}(r) = i \left[\Phi_p^n \left(\left(1 - 2\nu + \frac{n^2}{\zeta_p^2} \right) I_n(\zeta_p) - \frac{n^2}{\zeta_p} I_n'(\zeta_p) \right) + \tilde{\Phi}_p^n \left(-\frac{n^2}{\zeta_p^2} I_n(\zeta_p) + \frac{I_n'(\zeta_p)}{\zeta_p} \right) \right. \\ \quad \left. + \Psi_p^n \left(\frac{n}{\zeta_p^2} I_n(\zeta_p) - \frac{n}{\zeta_p} I_n'(\zeta_p) \right) \right] \\ \sigma_{n,p}^{\theta z}(r) = i \left[\Phi_p^n \left(I_n(\zeta_p) \frac{2(\nu-1)n}{\zeta_p} - n I_n'(\zeta_p) \right) - \tilde{\Phi}_p^n \frac{n}{\zeta_p} I_n(\zeta_p) - \Psi_p^n \frac{I_n'(\zeta_p)}{2} \right] \\ \sigma_{n,p}^{zz}(r) = i \left[\Phi_p^n \left(-2(2-\nu) I_n(\zeta_p) - \zeta_p I_n'(\zeta_p) \right) - \tilde{\Phi}_p^n I_n(\zeta_p) \right] \end{array} \right. \quad (9.12)$$

9.7. Modèle harmonique, termes d'amorce

Dans la section précédente, deux potentiels (harmonique et bi-harmonique) portant sur les déplacements ont été introduits de sorte que les contraintes mesurées soient identifiées au champ de contrainte calculé au rayon R_m . Cependant cette identification n'est faite que pour $p \neq 0$, il convient donc d'introduire une autre solution permettant d'identifier les termes pour $p = 0$ et $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$. La raison pour laquelle il est nécessaire d'introduire une autre solution élastique est que les potentiels Φ et Ψ ont très peu de termes libres lorsque $p = 0$ (du fait que si

$n \neq 0$ alors $I_n(0) = 0$. Nous utilisons les potentiels de Boussinesq (que nous avons introduits au chapitre 8).

$$\begin{cases} 2\mu u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + z \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ 2\mu u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{z}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ 2\mu u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + z \frac{\partial \gamma}{\partial z} - (3 - 4\nu)\gamma \end{cases} \quad (9.13)$$

où $\nabla^2 \phi = \nabla^2 \gamma = \nabla^2 \psi = 0$.

Le champ de contrainte correspondant à ces potentiels est donné par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial \theta} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{rz} = \frac{\partial r \partial z}{\partial^2 \phi} + z \frac{\partial r \partial z}{\partial^2 \gamma} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{z}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{z}{r^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} - 2\nu \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \sigma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta \partial z} - \frac{1 - 2\nu}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \\ \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{cases} \quad (9.14)$$

Nous cherchons les potentiels ϕ , γ et ψ sous la forme de polynômes en r et z harmoniques définis au chapitre 2, notés pour $k \geq n$, $X_k^n(r, z) \exp(in\theta)$ et $Y_k^n(r, z) \exp(in\theta)$ où nous avons :

$$0 \leq n \leq N, \quad n \leq k, \quad \begin{cases} X_k^n(r, z) = \sum_{j=0}^{k-n} x_{k,j}^n r^{2(k-j)-n} z^{2j} \\ Y_k^n(r, z) = \sum_{j=0}^{k-n} y_{k,j}^n r^{2(k-j)-n} z^{2j+1} \end{cases} \quad (9.15)$$

où :

$$0 \leq n \leq N, \quad n \leq k, \quad 0 \leq j \leq k - n, \quad \begin{cases} x_{k,j}^n = \frac{(-1)^{j+k} (2k)!}{2^{2(k-j)-n} (k-n-j)! (2j)! (k-j)!} \\ y_{k,j}^n = \frac{2k+1}{2j+1} x_{k,j}^n \end{cases} \quad (9.16)$$

Cette écriture en polynôme selon r et z convient à la forme des contraintes dans le système d'équations (9.14) car il y a des z en facteur dans l'écriture. L'objectif est trouver la décomposition telle que les contraintes rr , $r\theta$ et rz , associées aux potentiels ϕ , γ et ψ , évaluées au rayon R_m soient des polynômes en z de degré zéro. En effet dans ces conditions les coefficients $\sigma_{n,0}^{(\cdot)}(R_m)$ pourrons être identifiés aux coefficients $S_{n,0}^{(\cdot)}$ ((\cdot) désignant rr , $r\theta$ et rz). Cette recherche se fait simplement en sommant quelques polynômes et en résolvant un système linéaire, cela n'a

aucun intérêt théorique, nous ne présentons donc que les potentiels résultants satisfaisant les conditions énoncées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(r, \theta, z) = A_0 \left(-\frac{r^2}{2} + z^2 \right) + B_0 \left(-\frac{3r^2 z}{2} + z^3 \right) \\ \quad + 2\text{Re} \left[\left\{ A_1 \left(\frac{3r^3}{2} - 6rz^2 \right) - 3B_1 rz + \frac{2(1+2\nu)}{(45+30\nu)R_m^2} (2A_1 + \nu C_1) \right. \right. \\ \quad \times \left. \left. \left(-\frac{15r^5}{8} + \frac{45r^3 z^2}{2} - 15rz^4 \right) \right\} \exp(i\theta) \right] \\ \quad + 2\text{Re} \left[\sum_{n=2}^N \{ A_n r^n + B_n r^n z + C_n r^n (r^2 - 2(1+n)z^2) \} \exp(in\theta) \right] \\ \gamma(r, \theta, z) = -\frac{3}{1+\nu} B_0 \left(-\frac{r^2}{2} + z^2 \right) \\ \quad + 2\text{Re} \left[\left\{ -3C_1 rz - \frac{6}{(45+30\nu)R_m^2} (2A_1 + \nu C_1) \left(\frac{15r^3 z}{2} - 10rz^3 \right) \right\} \exp(i\theta) \right] \\ \quad + 2\text{Re} \left[\sum_{n=2}^N \frac{2(1+n)}{2\nu-1} C_n r^n z \exp(in\theta) \right] \\ \psi(r, \theta, z) = C_0 \left(\frac{3r^4}{8} - 3r^2 z^2 + z^4 \right) \\ \quad + 2\text{Re} \left[\left\{ \frac{2i\nu}{(45+30\nu)R_m^2} (2A_1 + \nu C_1) \left(-\frac{15r^5}{8} + \frac{45r^3 z^2}{2} - 15rz^4 \right) \right\} \exp(i\theta) \right] \\ \quad + 2\text{Re} \left[\sum_{n=2}^N \left\{ \frac{i}{2} B_n r^n z + \frac{i(1-\nu)}{1-2\nu} C_n r^n (r^2 - 2(1+n)z^2) \right\} \exp(in\theta) \right] \end{array} \right. \quad (9.17)$$

Il convient donc d'identifier les coefficients inconnus suivants :

$$n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \{A_n; B_n; C_n\} \quad (9.18)$$

En utilisant la relation (9.14) nous obtenons les contraintes pour $p = 0$ explicitement (9.19), (9.20) et (9.21). Il est remarquable que les termes pour $n \geq 2$ sont beaucoup plus réguliers que les termes pour $n = 0$ ou $n = 1$. On peut remarquer l'analogie des contraintes pour $n \geq 2$ avec le cas bidimensionnel exposé au chapitre 4. Il s'agit en fait de la contrepartie réelle des développements dans le corps des complexes que nous avons menés.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{0,0}^{rr}(r) = -A_0 \\ \sigma_{0,0}^{r\theta}(r) = -3r^2 C_0 \\ \sigma_{0,0}^{rz}(r) = -\frac{6(1+\nu)r}{1+4\nu} B_0 \\ \sigma_{0,0}^{\theta\theta}(r) = -A_0 \\ \sigma_{0,0}^{\theta z}(r, z) = 12rz C_0 \\ \sigma_{0,0}^{zz}(z) = 2 \left(A_0 + \frac{6(1+\nu)z B_0}{1+4\nu} \right) \end{array} \right. \quad (9.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
\sigma_{1,0}^{rr}(r) & = & -r \left(\frac{5+2\nu}{3+2\nu} \left(\frac{r}{R_m} \right)^2 (2A_1 + \nu C_1) - 3(3A_1 + 2\nu C_1) \right) \\
\sigma_{1,0}^{r\theta}(r) & = & ir \left(3A_1 - \frac{1-2\nu}{(3+2\nu)R_m^2} r^2 (2A_1 + \nu C_1) \right) \\
\sigma_{1,0}^{rz}(r, z) & = & -3B_1 - \frac{6(R_m^2 - r^2)}{R_m^2} (2A_1 + \nu C_1) z \\
\sigma_{1,0}^{\theta\theta}(r) & = & r \left(\frac{-1+2\nu}{3+2\nu} \left(\frac{r}{R_m} \right)^2 (2A_1 + \nu C_1) + 3(A_1 + 2\nu C_1) \right) \\
\sigma_{1,0}^{\theta z}(r, z) & = & -3i \left(\frac{2(-1+2\nu)}{3+2\nu} \left(\frac{r}{R_m} \right)^2 z (2A_1 + \nu C_1) + (4A_1 z + B_1 + 2\nu C_1 z) \right) \\
\sigma_{1,0}^{zz}(r, z) & = & 6r \left(\left(\frac{2+\nu}{3+2\nu} \left(\frac{r}{R_m} \right)^2 - \frac{4(1+\nu)}{3+2\nu} \left(\frac{z}{R_m} \right)^2 \right) (2A_1 + \nu C_1) \right. \\
& & \left. - 2 \left(A_1 + \frac{\nu-1}{2} C_1 \right) \right)
\end{array} \right. \quad (9.20)$$

$$n \geq 2, \left\{ \begin{array}{lcl}
\sigma_{n,0}^{rr}(r) & = & \frac{A_n n(n-1)(2\nu-1)r^{n-2} + C_n(n-2)(n+1)r^n}{2\nu-1} \\
\sigma_{n,0}^{r\theta}(r) & = & i \frac{A_n n(n-1)(2\nu-1)r^{n-2} + C_n n(n+1)r^n}{2\nu-1} \\
\sigma_{n,0}^{rz}(r) & = & \frac{B_n}{2} n r^{n-1} \\
\sigma_{n,0}^{\theta\theta}(r) & = & \frac{A_n n(n-1)(2\nu-1)r^{n-2} + C_n(n+2)(n+1)r^n}{1-2\nu} \\
\sigma_{n,0}^{\theta z}(r) & = & \frac{iB_n}{2} n r^{n-1} \\
\sigma_{n,0}^{zz}(r) & = & \frac{4C_n(1+n)\nu r^n}{1-2\nu}
\end{array} \right. \quad (9.21)$$

9.8. Extraction des coefficients

Dans cette section, nous obtenons une expression analytique des coefficients inconnus (9.10) et (9.18) en fonction des coefficients de Fourier calculés à partir des signaux mesurés (9.4).

9.8.1. Extraction des termes d'amorce

En considérant les trois derniers systèmes d'équations (9.19), (9.20) et (9.21) dont on ne retient que les composantes en rr , $r\theta$ et rz , la condition (9.6) s'écrit simplement pour $p = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ll} n = 0 & A_0 = -S_{0,0}^{rr} \\ n = 1 & A_1 = \frac{S_{1,0}^{rr}(1-2\nu) - iS_{1,0}^{r\theta}(13+10\nu)}{36(1+\nu)R_m} \\ n \geq 2 & A_n = \frac{nS_{n,0}^{rr} + i(n-2)S_{n,0}^{r\theta}}{2n(n-1)R_m^{n-2}} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{ll} n = 0 & B_0 = -\frac{1+4\nu}{6(1+\nu)R_m} S_{0,0}^{rz} \\ n = 1 & B_1 = -\frac{S_{1,0}^{rz}}{3} \\ n \geq 2 & B_n = \frac{2S_{n,0}^{rz}}{nR_m^{n-1}} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{ll} n = 0 & C_0 = -\frac{1}{3R_m^2} S_{0,0}^{r\theta} \\ n = 1 & C_1 = \frac{S_{1,0}^{rr}(7+10\nu) + iS_{1,0}^{r\theta}(17+14\nu)}{36\nu(1+\nu)R_m} \\ n \geq 2 & C_n = \frac{(S_{n,0}^{rr} + iS_{n,0}^{r\theta})(1-2\nu)}{2(n+1)R_m^n} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (9.22)$$

9.8.2. Extraction des termes courants

L'extraction des termes pour $p \neq 0$ est faite en inversant une matrice 3×3 . En considérant le système (9.12) pour les composantes rr , $r\theta$ et rz , la condition (9.6) peut en effet être écrite sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}^{n,p}(r) \cdot \begin{pmatrix} \Phi_p^n \\ \tilde{\Phi}_p^n \\ \Psi_p^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{n,p}^{rr} \\ S_{n,p}^{r\theta} \\ S_{n,p}^{rz} \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

où les coefficients des matrices 3×3 sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{1,1}^{n,p}(r) = i \left(-I_n(\zeta_p) \left(2\nu - 1 + \left(\frac{n}{\zeta_p} \right)^2 \right) + I_n'(\zeta_p) \left(\zeta_p + \frac{n^2}{\zeta_p} \right) \right) \\ M_{1,2}^{n,p}(r) = iI_n''(\zeta_p) \\ M_{1,3}^{n,p}(r) = in \left(\frac{I_n'(\zeta_p)}{\zeta_p} - \frac{I_n(\zeta_p)}{\zeta_p^2} \right) \\ M_{2,1}^{n,p}(r) = -nI_n''(\zeta_p) \\ M_{2,2}^{n,p}(r) = n \left(\frac{I_n(\zeta_p)}{\zeta_p^2} - \frac{I_n'(\zeta_p)}{\zeta_p} \right) \\ M_{2,3}^{n,p}(r) = - \left(\frac{n^2}{\zeta_p^2} + \frac{1}{2} \right) I_n(\zeta_p) + \frac{I_n'(\zeta_p)}{\zeta_p} \\ M_{3,1}^{n,p}(r) = - \left(\left(\frac{n^2}{\zeta_p} + \zeta_p \right) I_n(\zeta_p) + 2(1-\nu)I_n'(\zeta_p) \right) \\ M_{3,2}^{n,p}(r) = -I_n'(\zeta_p) \\ M_{3,3}^{n,p}(r) = -\frac{n}{2\zeta_p} I_n(\zeta_p) \end{array} \right. \quad (9.24)$$

Les matrices $\mathbf{M}^{n,p}$ ont un déterminant non nul et peuvent donc être inversées. Les inconnues (9.10) sont déterminées comme suit :

$$\begin{pmatrix} \Phi_p^n \\ \tilde{\Phi}_p^n \\ \Psi_p^n \end{pmatrix} = [\mathbf{M}^{n,p}(R_m)]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} S_{n,p}^{rr} \\ S_{n,p}^{r\theta} \\ S_{n,p}^{rz} \end{pmatrix} \quad (9.25)$$

9.9. Equilibre général

9.9.1. Modèle harmonique

Comme nous l'avons précisé en introduction de ce chapitre, l'équilibre global est automatiquement vérifié avec la solution en potentiel (pas de mouvements de corps rigide). Cependant nous pouvons contrôler comment les résultantes des vecteurs contrainte aux surfaces $z = \pm L$ se répartissent, c'est-à-dire à quel système d'appuis elles correspondent. Des résultantes de traction selon e_z , de cisaillements selon e_x et e_y et de moments selon les trois axes peuvent être transmis. Cependant, pour éviter de compliquer trop la recherche des résultantes aux appuis, nous résolvons une poutre isostatique sur deux appuis simples. Pour vérifier ces conditions supplémentaires nous introduisons trois nouveaux potentiels harmoniques de Boussinesq ϕ^* , γ^* et ψ^* définis en fonction des déplacements sous la forme de (9.13) et dont les contraintes s'expriment sous la forme de (9.14). Evidemment, les composantes rr , $r\theta$ et rz des contraintes associées à ces trois nouveaux potentiels doivent s'annuler en R_m . De la même manière que pour ϕ , γ et ψ nous cherchons les nouveaux potentiels sous la forme des polynômes en r et z (9.15). Cela conduit directement à considérer les potentiels suivants :

$$\begin{cases} \phi^*(r, \theta, z) = \nu(r^2 - 2z^2)\alpha_1 + \operatorname{Re} [\exp(i\theta)r (-\alpha_2 z [-3(1 + 4\nu)r^2 + 6(3 + 2\nu)R_m^2 + 4(1 + 4\nu)z^2] \\ \quad + 6i(r^2 - 4z^2)\alpha_3)] \\ \gamma^*(r, \theta, z) = z\alpha_1 + \operatorname{Re} \left[\exp(i\theta) \frac{3r}{\nu} (\nu(r^2 - 4z^2)\alpha_2 - 4iz\alpha_3) \right] \\ \psi^*(r, \theta, z) = \left(z^3 - \frac{3r^2 z}{2} \right) \alpha_4 + \operatorname{Re} [\exp(i\theta)r(2i\nu z(-3r^2 + 4z^2)\alpha_2 + 3(r^2 - 4z^2)\alpha_3)] \end{cases} \quad (9.26)$$

Ainsi en réinjectant (9.26) dans (9.14) le champ de contrainte associé à ϕ^* , γ^* et ψ^* est obtenu (et noté $\sigma_{(..)}^*$, où $(..)$ désigne rr , $r\theta$, rz , $\theta\theta$, θz ou zz) :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^*(r, \theta, z) = 0 \\ \sigma_{r\theta}^*(r, \theta, z) = 0 \\ \sigma_{rz}^*(r, \theta, z) = 3\alpha_2(3 + 2\nu)(R_m^2 - r^2) \exp(i\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}^*(r, \theta, z) = 0 \\ \sigma_{\theta z}^*(r, \theta, z) = 3r\alpha_4 + 3i\alpha_2((-1 + 2\nu)r^2 + (3 + 2\nu)R_m^2) \exp(i\theta) \\ \sigma_{zz}^*(r, \theta, z) = \frac{2(1 + \nu)}{\nu} (-\nu\alpha_1 + 6 \exp(i\theta)r(2\nu\alpha_2 z + i\alpha_3)) \end{cases} \quad (9.27)$$

9.9.2. Expression des résultantes

Le torseur appliqué à chacune des extrémités du cylindre est composé de T^\pm (traction d'axe e_z), V_x^\pm et V_y^\pm (cisaillements d'axes e_x et e_y) et M_x^\pm , M_y^\pm et M_z^\pm (moments fléchissants d'axes e_x , e_y et e_z). Les exposants \pm désignent la surface $z = L$ ou $z = -L$. (Les coordonnées cartésiennes sont rappelées figure 9.1(b)). Pour ne pas compliquer les expressions, nous considérons que le cylindre est sur deux appuis simples isostatiques (nous libérons les moments de flexion selon e_x et e_y), ce qui est une approximation, mais rien n'empêche de considérer par la suite des expressions plus fines. Ces résultantes équilibrent le chargement mesuré au rayon R_m . Nous posons donc les forces linéiques F_x , F_y et F_z ainsi que les moments linéiques m_x , m_y et m_z définis par :

$$\begin{cases} F_x(z) = R_m \int_0^{2\pi} [\sigma_{rr}^m(\theta, z) \cos(\theta) - \sigma_{r\theta}^m(\theta, z) \sin(\theta)] d\theta \\ F_y(z) = R_m \int_0^{2\pi} [\sigma_{rr}^m(\theta, z) \sin(\theta) + \sigma_{r\theta}^m(\theta, z) \cos(\theta)] d\theta \\ F_z(z) = R_m \int_0^{2\pi} \sigma_{rz}^m(\theta, z) d\theta \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} m_x(z) = R_m^2 \int_0^{2\pi} \sigma_{rz}^m(\theta, z) \sin(\theta) d\theta \\ m_y(z) = -R_m^2 \int_0^{2\pi} \sigma_{rz}^m(\theta, z) \cos(\theta) d\theta \\ m_z(z) = R_m^2 \int_0^{2\pi} \sigma_{r\theta}^m(\theta, z) d\theta \end{cases} \quad (9.28)$$

En prenant en compte (9.3) nous obtenons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x(z) - iF_y(z) = 2\pi R_m \sum_{p=-P}^P (S_{1,p}^{rr} - iS_{1,p}^{r\theta}) \exp\left(i\frac{p\pi}{L}z\right) \\ F_z(z) = 2\pi R_m \sum_{p=-P}^P S_{0,p}^{rz} \exp\left(i\frac{p\pi}{L}z\right) \\ -m_y(z) - im_x(z) = 2\pi R_m^2 \sum_{p=-P}^P S_{1,p}^{rz} \exp\left(i\frac{p\pi}{L}z\right) \\ m_z(z) = 2\pi R_m^2 \sum_{p=-P}^P S_{0,p}^{r\theta} \exp\left(i\frac{p\pi}{L}z\right) \end{array} \right. \quad (9.29)$$

Du fait que l'équilibre global est vérifié, il n'est nécessaire d'identifier que les résultantes en $z = L$, car les conditions en $z = -L$ seront automatiquement vérifiées. Nous avons pour une poutre isostatique sur deux appuis simple les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x^+ = M_x^- = 0 \\ M_y^+ = M_y^- = 0 \\ M_z^+ = M_z^- = \frac{1}{2} \int_{-L}^L m_z(z) dz \\ T^+ = T^- = \frac{1}{2} \int_{-L}^L F_z(z) dz \\ V_y^+ = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L m_x(z) dz - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F_y(z)(z+L) dz \\ V_x^+ = -\frac{1}{2L} \int_{-L}^L m_y(z) dz - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F_x(z)(z+L) dz \end{array} \right. \quad (9.30)$$

Ce dernier système devient en prenant en compte (9.30) :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x^+ = M_y^+ = 0 \\ M_z^+ = 2L\pi R_m^2 S_{0,0}^{r\theta} \\ T^+ = 2L\pi R_m S_{0,0}^{rz} \\ V_x^+ - iV_y^+ = 2\pi R_m^2 S_{1,0}^{rz} - \pi R_m \sum_{p=-P}^P (S_{1,p}^{rr} - iS_{1,p}^{r\theta}) Z_p \end{array} \right. \quad (9.31)$$

où :

$$Z_p = \begin{cases} 2L & p = 0 \\ -\frac{2i(-1)^p L}{p\pi} & p \neq 0 \end{cases} \quad (9.32)$$

9.9.3. Conditions faibles

Les résultantes que nous venons de calculer et qui ne dépendent que des contraintes mesurées, doivent être identifiées avec les résultantes du vecteur contrainte associé au champ de contrainte total dans le cylindre. Cela

revient à vérifier les conditions faibles suivantes (uniquement en $z = L$ du fait de l'équilibre global) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_m} \sigma_{zz}^T(r, \theta, L) r dr d\theta = T^+ \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{R_m} \sigma_{zz}^T(r, \theta, L) r^2 \cos(\theta) dr d\theta = -M_y^+ \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{R_m} \sigma_{zz}^T(r, \theta, L) r^2 \sin(\theta) dr d\theta = M_x^+ \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{R_m} \sigma_{\theta z}^T(r, \theta, L) r^2 dr d\theta = M_z^+ \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{R_m} (\sigma_{rz}^T(r, \theta, L) \cos(\theta) - \sigma_{\theta z}^T(r, \theta, L) \sin(\theta)) r dr d\theta = V_x^+ \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{R_m} (\sigma_{rz}^T(r, \theta, L) \sin(\theta) + \sigma_{\theta z}^T(r, \theta, L) \cos(\theta)) r dr d\theta = V_y^+ \end{array} \right. \quad (9.33)$$

Puisque $\sigma_{(\dots)}^T = \sigma_{(\dots)} + \sigma_{(\dots)}^*$ et en prenant en compte (9.5) d'une part et (9.27) d'autre part, les conditions (9.33) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\pi R_m^2 (1 + \nu) \alpha_1 = T^+ - 2\pi \sum_{\substack{p=-P \\ p \neq 0}}^P (-1)^p \int_0^{R_m} \sigma_{0,p}^{zz}(r) r dr - 2\pi \int_0^{R_m} \sigma_{0,0}^{zz}(L) r dr = T^* \\ \frac{3\pi}{2} R_m^4 \alpha_4 = M_z^+ - 2\pi \sum_{\substack{p=-P \\ p \neq 0}}^P (-1)^p \int_0^{R_m} \sigma_{0,p}^{\theta z}(r) r^2 dr - 2\pi \int_0^{R_m} \sigma_{0,0}^{\theta z}(r, L) r^2 dr = M_z^* \\ \frac{6(1 + \nu)}{\nu} \pi R_m^4 (2L\nu\alpha_2 + i\alpha_3) = -M_y^+ - iM_x^+ - 2\pi \left[\sum_{\substack{p=-P \\ p \neq 0}}^P (-1)^p \int_0^{R_m} \sigma_{1,p}^{zz}(r) r^2 dr + \int_0^{R_m} \sigma_{1,0}^{zz}(r, L) r^2 dr \right] = M_{x,y}^* \\ 12\pi R_m^4 (1 + \nu) \alpha_2 = V_x^+ - iV_y^+ - 2\pi \left[\sum_{\substack{p=-P \\ p \neq 0}}^P (-1)^p \int_0^{R_m} (\sigma_{1,p}^{rz}(r) - i\sigma_{1,p}^{\theta z}(r)) r dr + \int_0^{R_m} (\sigma_{1,0}^{rz}(r, L) - i\sigma_{1,0}^{\theta z}(r, L)) r dr \right] = V_{x,y}^* \end{array} \right. \quad (9.34)$$

Et finalement :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{T^*}{2\pi R_m^2 (1 + \nu)} & \alpha_2 &= \frac{V_{x,y}^*}{12\pi R_m^4 (1 + \nu)} \\ \alpha_3 &= i\nu \frac{LV_{x,y}^* - M_{x,y}^*}{6\pi R_m^4 (1 + \nu)} & \alpha_4 &= \frac{2M_z^*}{3\pi R_m^4} \end{aligned} \quad (9.35)$$

Les intégrales impliquées dans le système d'équations (9.34) peuvent être aisément calculées analytiquement (cf chapitre 2) pour $p \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{R_m} \sigma_{0,p}^{zz}(r) r dr = -\frac{iR_m}{p\pi} \left[L \left(\tilde{\Phi}_p^0 - 2(\nu - 2)\Phi_p^0 \right) I_1 \left(\frac{p\pi R_m}{L} \right) + \Phi_p^0 p\pi R_m I_2 \left(\frac{p\pi R_m}{L} \right) \right] \\ \int_0^{R_m} \sigma_{0,p}^{\theta z}(r) r^2 dr = -\frac{i\Psi_p^0 L R_m^2}{2p\pi} I_2 \left(\frac{p\pi R_m}{L} \right) \\ \int_0^{R_m} \sigma_{1,p}^{zz}(r) r^2 dr = -\frac{iR_m^2}{p\pi} \left[L \left(\tilde{\Phi}_p^1 + (5 - 2\nu)\Phi_p^1 \right) I_2 \left(\frac{p\pi R_m}{L} \right) + \Phi_p^1 p\pi R_m I_3 \left(\frac{p\pi R_m}{L} \right) \right] \\ \int_0^{R_m} (\sigma_{1,p}^{rz}(r) - i\sigma_{1,p}^{\theta z}(r)) r dr = -\frac{R_m}{2p\pi} \left[L \left(2\tilde{\Phi}_p^1 + \Psi_p^1 + (6 - 4\nu)\Phi_p^1 \right) I_1 \left(\frac{p\pi R_m}{L} \right) + 2\Phi_p^1 p\pi R_m I_2 \left(\frac{p\pi R_m}{L} \right) \right] \end{array} \right. \quad (9.36)$$

et pour $p = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{R_m} \sigma_{0,0}^{zz}(r, L) r dr = -R_m (R_m S_{0,0}^{rr} + L S_{0,0}^{rz}) \\ \int_0^{R_m} \sigma_{0,0}^{\theta z}(r, L) r^2 dr = -R_m^2 L S_{0,0}^{r\theta} \\ \int_0^{R_m} \sigma_{1,0}^{zz}(r, L) r^2 dr = -\frac{R_m L^2}{2} (S_{1,0}^{rr} - i S_{1,0}^{r\theta}) - R_m^3 \frac{S_{1,0}^{rr} (\nu(4\nu - 5) - 7) - i S_{1,0}^{r\theta} (\nu(4\nu + 19) + 17)}{24\nu(1 + \nu)} \\ \int_0^{R_m} (\sigma_{1,0}^{rz}(r, L) - i \sigma_{1,p}^{\theta z}(r)) r dr = -R_m (L (S_{1,0}^{rr} - i S_{1,0}^{r\theta}) - R_m S_{1,0}^{rz}) \end{array} \right. \quad (9.37)$$

9.10. Contraintes de contact

A la section 9.8 tous les coefficients ont été déterminés en fonction des coefficients de Fourier des signaux mesurés (9.4). A la section 9.9 un champ de contrainte supplémentaire a été introduit pour tenir compte du système d'appuis du cylindre. Les contraintes de contact s'obtiennent en évaluant le champ de contrainte total $\sigma_{(\cdot)}^T(r, \theta, z)$ en R_s . Pour cela nous avons les relations suivantes (pour (\cdot) désignant rr , $r\theta$ et rz) :

$$\sigma_{(\cdot)}^T(R_s, \theta, z) = \sigma_{(\cdot)}(R_s, \theta, z) + \sigma_{(\cdot)}^*(R_s, \theta, z) \quad (9.38)$$

où :

$$\sigma_{rr}^*(R_s, \theta, z) = \sigma_{r\theta}^*(R_s, \theta, z) = 0 \quad \left| \quad \sigma_{rz}^*(R_s, \theta, z) = \frac{(3 + 2\nu)(R_m^2 - R_s^2) V_{x,y}^*}{4\pi R_m^4 (1 + \nu)} \exp(i\theta) \right. \quad (9.39)$$

où :

$$\sigma_{(\cdot)}(R_s, \theta, z) = \sum_{n=-N}^N \sum_{p=-P}^P \sigma_{n,p}^{(\cdot)}(R_s) \exp\left(i \frac{p\pi}{L} z\right) \exp(in\theta) \quad (9.40)$$

où pour $p \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{n,p}^{rr}(R_s) \\ \sigma_{n,p}^{r\theta}(R_s) \\ \sigma_{n,p}^{rz}(R_s) \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{n,p}(R_s) \cdot [\mathbf{M}^{n,p}(R_m)]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} S_{n,p}^{rr} \\ S_{n,p}^{r\theta} \\ S_{n,p}^{rz} \end{pmatrix} \quad (9.41)$$

et pour $p = 0$ les équations (9.19), (9.20) et (9.21) doivent être évaluées en R_s avec les coefficients (9.22).

9.11. Nombre de troncature

Nous devons calculer l'inverse de la matrice $\mathbf{M}^{n,p}(R_s) \cdot [\mathbf{M}^{n,p}(R_m)]^{-1}$ pour l'identification des termes courants (9.10) par la relation (9.41). Le fait que le problème inverse est mal posé s'exprime ici grâce à la norme de cette matrice. En effet, cette norme agit comme un facteur amplificateur d'une petite variation sur les données mesurées $S_{n,p}^{(\cdot)}$ ((\cdot) désignant rr , $r\theta$ et rz). Elle est définie comme suit :

$$\kappa_{n,p} = \|\mathbf{M}^{n,p}(R_s) \cdot [\mathbf{M}^{n,p}(R_m)]^{-1}\| \quad (9.42)$$

où nous choisissons la norme de la matrice \mathbf{M} , donnée par $\|\mathbf{M}\| = \sqrt{\text{Tr}({}^t\mathbf{M} \cdot \mathbf{M})}$.

La figure 9.1 présente les normes $\kappa_{n,p}$ des matrices $\mathbf{M}^{n,p}(R_s) \cdot [\mathbf{M}^{n,p}(R_m)]^{-1}$ pour les paramètres listés au tableau 9.2. Nous pouvons remarquer que l'analyse que nous faisons au chapitre introductif se retrouve ici. En effet, plus n et p augmentent et plus le facteur amplificateur est grand. Il est donc nécessaire de tronquer les sommes de sorte qu'une petite erreur ne soit pas trop amplifiée jusqu'à faire diverger la solution. Les équations agissent comme un filtre passe-bas (diminuant l'amplitude des termes d'indices élevés) lorsque l'on propage le champ vers l'intérieur du cylindre. Donc lorsque l'on identifie la solution à partir d'une donnée considérée à l'intérieur, la propager vers la surface revient à amplifier les hautes fréquences et donc aussi une potentielle erreur

commise dans le calcul d'intégrale. Nous pouvons remarquer que la norme $\kappa_{n,p}$ augmente beaucoup plus vite selon la variable p que selon la variable n . Or les signaux que nous avons à traiter en laminage nécessitent plus de termes selon n que selon p car ils sont plus singuliers dans la direction tangentielle que dans la direction axiale. La modélisation que nous avons proposée coïncide donc bien avec le problème pratique à traiter.

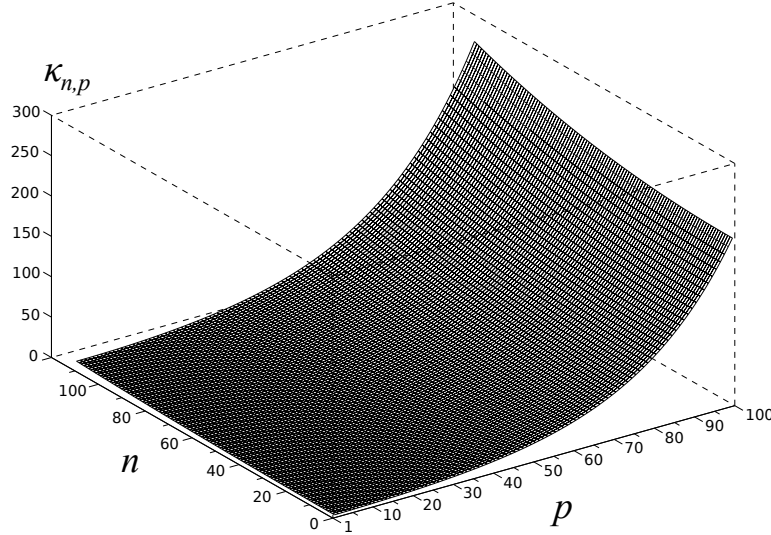


FIGURE 9.1 – Conditionnement

Comme nous l'avons déjà précisé au chapitre 5, il faudrait déterminer automatiquement les ordres de troncature des sommes. Pour cela, une approche empirique analogue à celle du chapitre 4 peut être proposée, ou mieux, un algorithme scrutant les coefficients (9.10), et coupant lorsque ceux-ci commencent à diverger. Cela n'a pas été automatisé, les ordres de troncature sont choisis à la main dans cette étude.

9.12. Validation de la méthode

9.12.1. Procédure

La procédure de validation est toujours la même. Nous utilisons le modèle prédictif Lam3/Tec3 développé initialement par Hacquin (1996). Nous obtenons une simulation de laminage donnant les contraintes de contact, que nous prescrivons à la surface du cylindre (notées $\sigma_{(..)}^p$). Nous calculons les contraintes élastiques au rayon R_m . Nous utilisons ces contraintes comme données d'entrée pour la méthode inverse tridimensionnelle, que nous avons développée. Nous reconstruisons ainsi les contraintes de contact au rayon R_s . La solution est validée en comparant ces dernières avec les contraintes prescrites. Nous introduisons donc l'erreur de reconstruction quantifiée suivante :

$$\epsilon_{(..)} = 100 \sqrt{\frac{\int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \left[\sigma_{(..)}^T(R_s, \theta, z) - \sigma_{(..)}^p(\theta, z) \right]^2 d\theta dz}{\int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \left[\sigma_{(..)}^p(\theta, z) \right]^2 d\theta dz}} \quad (9.43)$$

9.12.2. Conditions de laminage à froid

Dans le chapitre 4 nous avons considéré trois conditions de laminage. Il est apparu que les conditions de laminage à froid et Skinpass étaient plus difficiles à reconstruire. Ainsi pour cette étude nous nous concentrons sur ce type de conditions. Nous avons donc simulé avec Lam3/Tec3 le procédé de laminage à froid d'une tôle de très faible épaisseur, de sorte que les contraintes de contact soient particulièrement singulières. Celles-ci sont présentées à gauche, figure 9.2. Les paramètres de la simulation sont listés dans le tableau 9.2. Un effet de bord (que nous avons évoqué dans l'introduction de ce chapitre) est visible au niveau des rives de la tôle. La composante

rz est très particulière, du fait qu'une loi de Coulomb a été utilisée pour modéliser le frottement. En effet, cette composante est nulle partout car la vitesse relative entre le cylindre et la tôle est nulle, sauf au niveau des rives de la tôle (du fait de son élargissement) où une vitesse de glissement apparaît. Par ailleurs, les contraintes calculées au rayon R_m (remplaçant les mesures) sont présentées à droite figure 9.2.

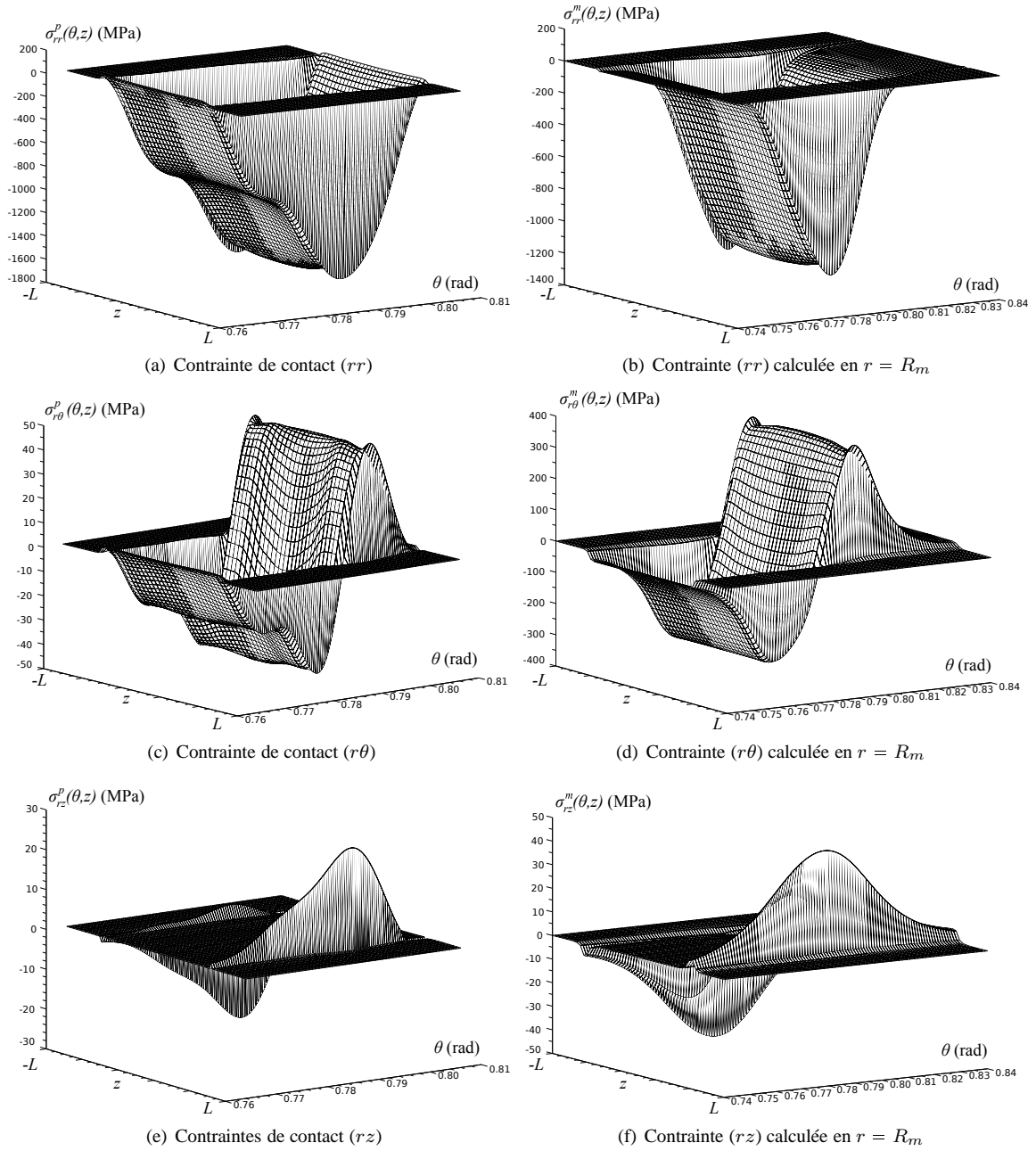


FIGURE 9.2 – Contraintes prescrites en R_s et calculées en R_m

R_s (mm)	277.5	t_f (mm)	0.252
R_m (mm)	274.5	E (MPa)	210 000
L (mm)	700	ν (-)	0.3
l (mm)	427.5	ω (rad/s)	2π
t_i (mm)	0.355	f (Hz)	3000

TABLE 9.2 – Paramètres de simulation de laminage à froid

9.12.3. Reconstruction et discussion

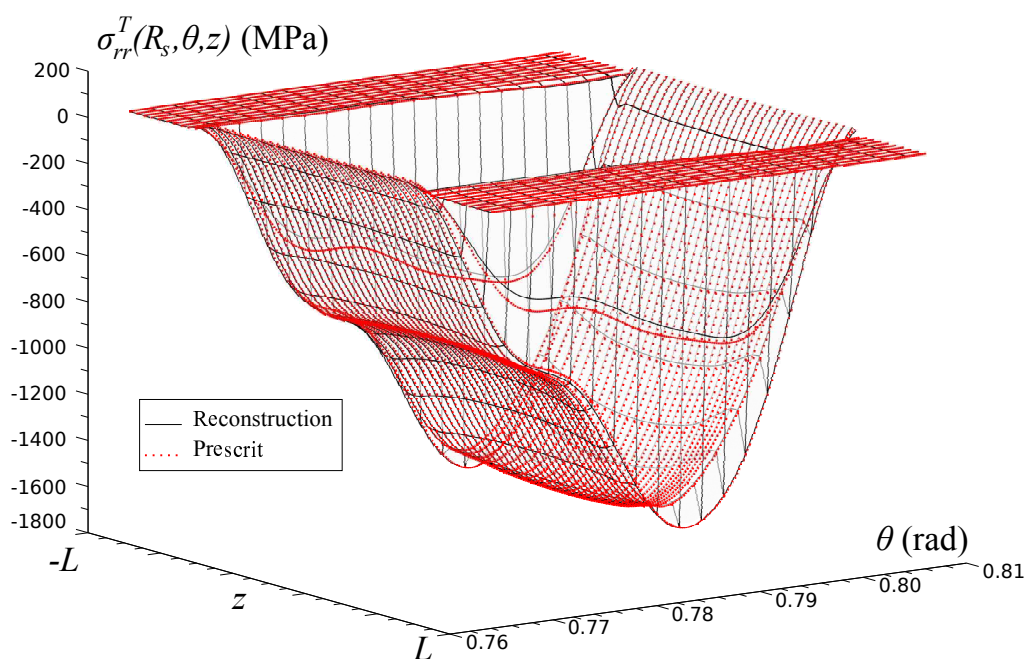
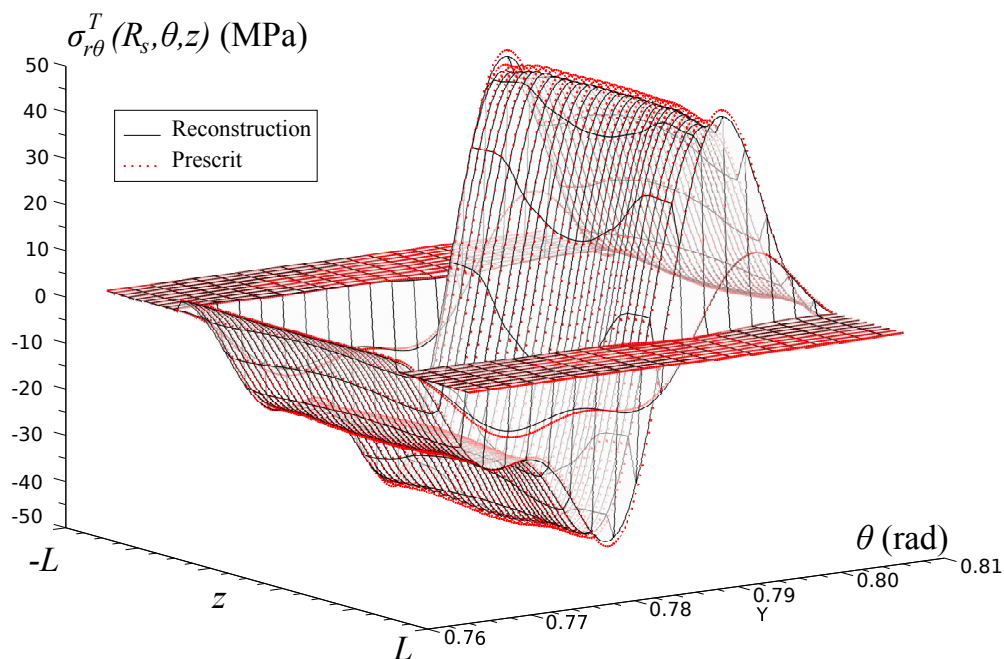
Solution théorique

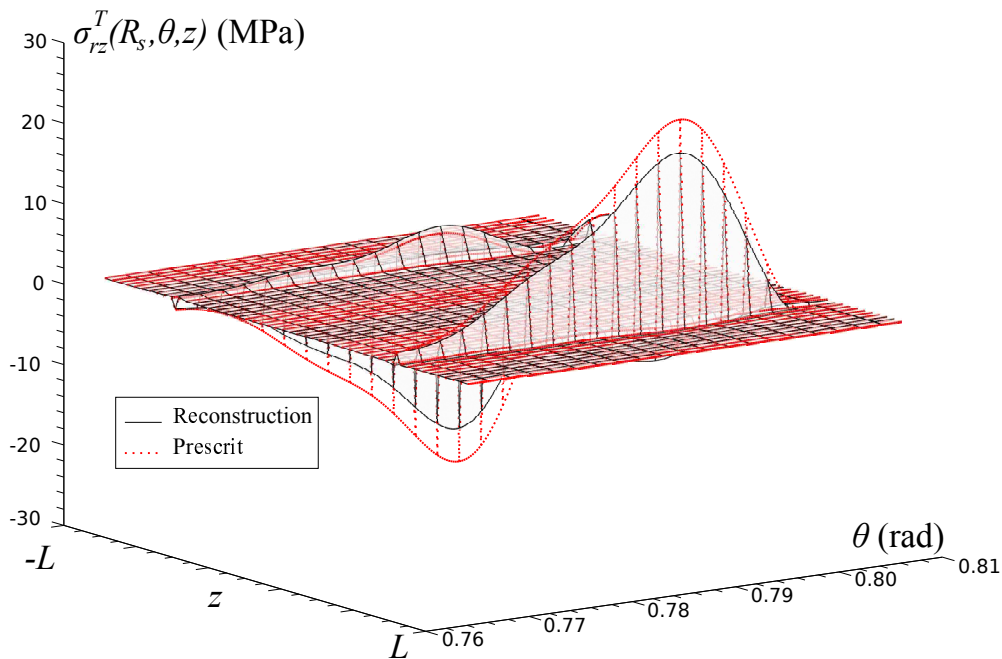
Les contraintes de contact sont reconstruites grâce à la méthode inverse tridimensionnelle, que nous avons développée. Comme nous avons pu le constater à la figure 9.2 les variations des contraintes selon l'axe e_z sont peu singulières sauf près des rives de la bande où un effet de bord est notable. Pour reconstruire cet effet de bord, les intégrales (9.4) doivent avoir une bonne précision de sorte que l'on puisse sommer suffisamment de termes d'indice p , (c'est-à-dire P assez grand). Cependant la norme $\kappa_{n,p}$ devient rapidement assez critique sur cet indice de sommation comme nous l'avons vu figure 9.1. Il faut donc un très grand nombre de points de mesure (donc un très grand nombre de capteurs) pour avoir une bonne description du signal dans cette zone. Nous prenons dans cette section $N_z^m = 500$, ce qui correspond à un capteur³ tous les 2.8 mm. Nous verrons à la section suivante un cas plus réaliste industriellement. Les erreurs de reconstruction sont listées dans le tableau 9.3 et la comparaison entre le signal prescrit et le signal reconstruit est faite figures 9.3, 9.4 et 9.5. Les deux signaux sont difficiles à discerner l'un de l'autre sauf au niveau de la rive de la bande où la reconstruction est légèrement moins bonne. Pour la composante rz , le signal étant uniquement localisé près des rives, l'erreur de reconstruction en pourcentage augmente, mais l'erreur absolue reste de quelques MPa.

	rr	$r\theta$	rz
N	500	500	500
P	100	100	200
ϵ	2.6% (Fig.9.3)	4.5% (Fig.9.4)	32.7% (Fig.9.5)

TABLE 9.3 – Erreur de reconstruction pour $N_z^m = 500$

3. Il n'est nécessaire d'avoir cette densité que près des rives de la bande (quelques centimètres avant et après), des résultats similaires ont été obtenu avec une densité dix fois plus faible dans la partie centrale

FIGURE 9.3 – Reconstruction de la contrainte (rr) pour $N_z^m = 500$ FIGURE 9.4 – Reconstruction de la contrainte $(r\theta)$ pour $N_z^m = 500$

FIGURE 9.5 – Reconstruction de la contrainte (rz) pour $N_z^m = 500$

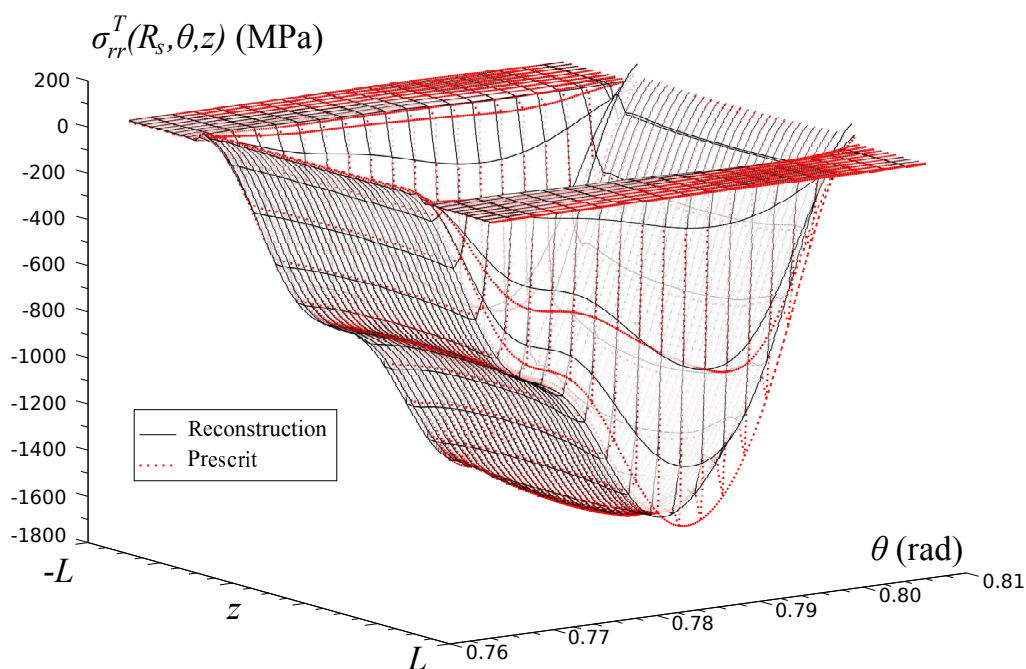
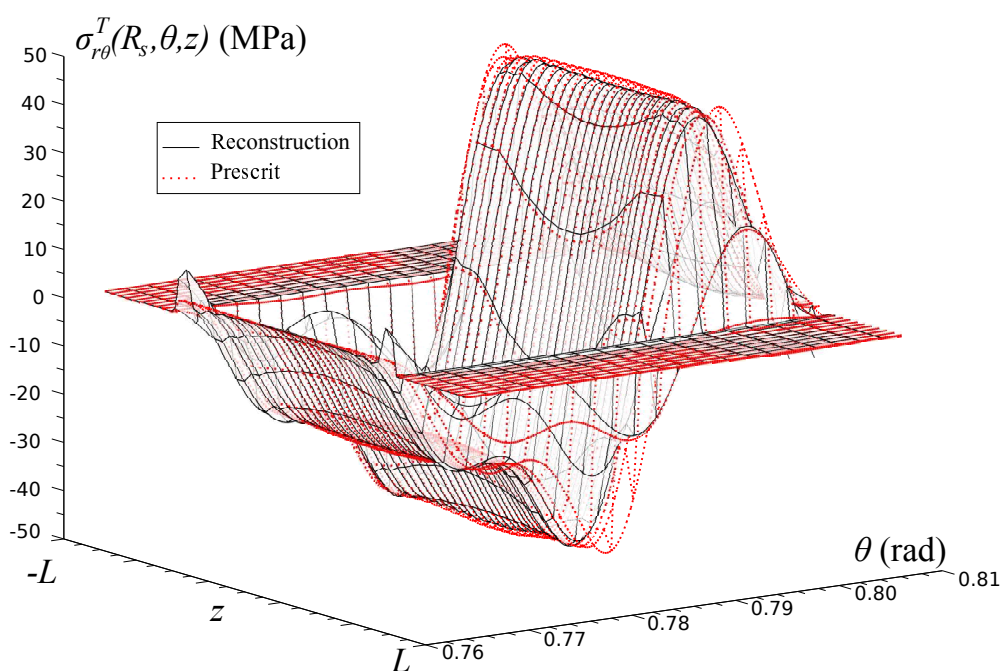
Solution dégradée

Bien que les résultats précédents soient très satisfaisants, il est clair que dans l'immédiat, l'insertion d'autant de capteurs peut être un frein tant technologique qu'économique. C'est la raison pour laquelle nous étudions une situation plus difficile où nous considérons que le nombre de capteurs insérés sous la surface du cylindre est limité à $N_z^m = 50$. La distance entre deux capteurs est donc de 2.8 cm. Du fait de cet espacement, le signal est moins bien décrit selon l'axe e_z . La qualité des intégrales (9.4) est donc plus médiocre, ce qui conduit à diminuer l'ordre de troncature P .

Les erreurs de reconstruction sont listées au tableau 9.4 et les comparaisons entre les contraintes reconstruites et les contraintes prescrites sont présentées figures 9.6 et 9.7. Il est remarquable que la reconstruction est précise dans la majeure partie du cylindre, en revanche près des rives de la bande, la reconstruction ne reproduit pas l'effet de bord observable pour les contraintes prescrites. Cela est dû au fait que le signal d'entrée est mal décrit dans cette zone où les variations sont importantes. La composante rz ne peut donc pas être reconstruite (erreur supérieure à 100%), du fait que le signal est localisé autour des rives de la bande.

	rr	$r\theta$
N	500	500
P	50	20
ϵ	5.7% (Fig.9.6)	23.5% (Fig.9.7)

TABLE 9.4 – Erreur quantifiée pour $N_z^m = 50$

FIGURE 9.6 – Reconstruction de la contrainte (rr) pour $N_z^m = 50$ FIGURE 9.7 – Reconstruction de la contrainte $(r\theta)$ pour $N_z^m = 50$

Solution avec du bruit

Comme dans les chapitres précédents nous considérons que les mesures peuvent être bruitées. Nous appliquons de même qu'au chapitre 4 un bruit altérant les hautes fréquences du signal, ainsi qu'un léger bruit blanc sur toutes

les fréquences. Un filtre passe-bas est ensuite appliqué pour filtrer les hautes fréquences. Un échantillon du bruit est présenté figure 9.8. Les erreurs de reconstruction sont listées dans le tableau 9.5. Il est notable que la qualité de la méthode n'est pas compromise. Les reconstructions sont proches de celles obtenues sans bruit, et nous ne reproduisons pas les figures qui sont très similaires.

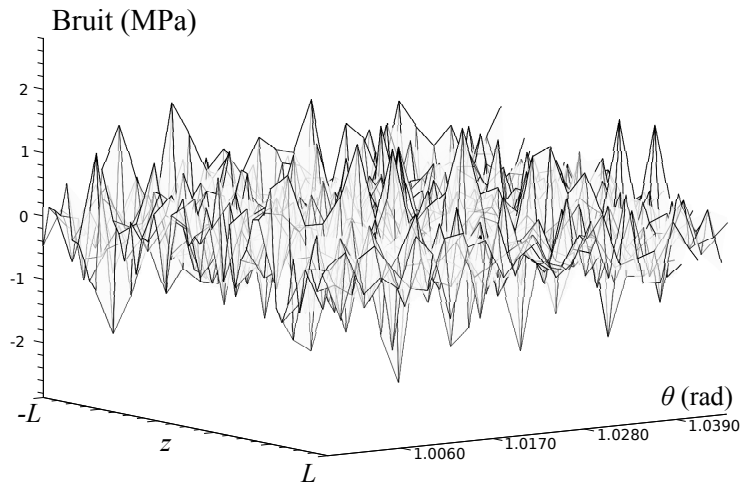


FIGURE 9.8 – Echantillon du bruit appliqué aux données d'entrée

	rr	$r\theta$
N	500	500
P	50	20
ϵ	11.5% (\simeq Fig.9.6)	24% (\simeq Fig.9.7)

TABLE 9.5 – Erreur de reconstruction pour $N_z^m = 50$ avec du bruit

9.13. Intérêt de la solution 3D

Comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents, les intégrales (9.4) à calculer sont obtenues par fft, l'unique différence avec le cas bidimensionnel est que nous intégrons sur deux variables θ et z . Ainsi, si l'on représente le signal dépendant de ces deux variables dans un tableau de taille $N_\theta^i \times N_z^i$ (où N_θ^i est le nombre de points d'interpolation du signal selon θ sur un tour et N_z^i le nombre de points d'interpolation selon z) alors il faut calculer la fft de chacune des colonnes de ce tableau. Nous obtenons alors un tableau contenant les fft selon θ des N_z^i signaux. Nous réduisons ce tableau à N lignes car il s'agit du nombre d'harmoniques souhaité. Il convient alors de calculer les fft de chacune des lignes de ce dernier tableau. Le tableau alors obtenu fournit la double fft des signaux mesurés. Il devient clair que la double fft nécessite $N \times N_z^i$ calculs de fft unidimensionnelles (N_z^i fft de taille N_θ^i et N fft de taille N_z^i). Le temps de calcul est à comparer à celui de la méthode bidimensionnelle exposée au chapitre 4 exécutée pour les N_z^m positions axiales des capteurs de déformation conduisant à calculer N_z^m fft de tailles N_θ . En pratique $N_z^m \leq N_z^i$. Donc en théorie la méthode tridimensionnelle est plus lente que la méthode bidimensionnelle appliquée plusieurs fois. Mais en pratique nous diminuons le nombre de points d'interpolation N_θ^i pour obtenir des temps de calcul réduits sans dégrader la solution. Le compromis qui a été trouvé donne un temps de calcul (affiché par Scilab 5.3 sur un processeur 2.8 GHz pour $N_z^i = 1000$ et $N_\theta^i = 5000$) pour chacune des trois doubles fft à calculer de 0.5 seconde. Il faut considérer que trois processeurs différents calculent en parallèle ces quantités.

L'intérêt de la solution 3D par rapport à la méthode 2D est strictement limité au cas où le nombre de capteur N_z^m est suffisamment grand. En effet, si par exemple $N_z^m = 50$, utiliser la méthode 2D prend $0.07 \times 500 = 3.5$ secondes, tandis que la méthode 3D ne prend que 0.5 seconde environ. Par ailleurs la solution 3D est légèrement

plus précise que la méthode 2D appliquée successivement sur les différentes tranches aux positions des capteurs. Cela tient au fait que nous nous affranchissons de l'hypothèse des déformations planes, mais surtout que les mesures de contraintes faites par chaque capteur n'ont pas à être équilibrées sur ces mêmes tranches, elles sont équilibrées globalement aux appuis. Si l'on applique successivement la méthode 2D sur chaque tranche cylindrique (aux positions des capteurs) nous devons équilibrer le chargement sur cette tranche⁴, pour ce faire nous pouvons soit appliquer une résultante au centre, soit équilibrer directement le signal à la surface du cylindre. Par exemple pour la composante rr on pourra couper le signal à π (si l'emprise se trouve dans l'intervalle $[0, \pi]$) et dupliquer le signal sur $[\pi, 2\pi]$, alors que pour la composante $r\theta$ on coupera à $\pi/2$, on dupliquera le signal opposé sur $[\pi/2, \pi]$, puis on dupliquera le signal obtenu sur $[\pi, 2\pi]$. Cette dernière technique a été utilisée et fonctionne très correctement du fait du principe de Saint-Venant. Une comparaison des méthodes 2D et 3D est faite figures 9.9 et 9.10, et il ressort très clairement que la méthode 2D est un peu moins précise que la méthode 3D. Donc dès que le nombre de capteurs devient suffisant ($N_z^m = 50$ par exemple) la méthode 3D est une option économique en temps et précise. Dans le cas où l'on ne peut insérer que quelques capteurs, la méthode 2D appliquée plusieurs fois est préférable.

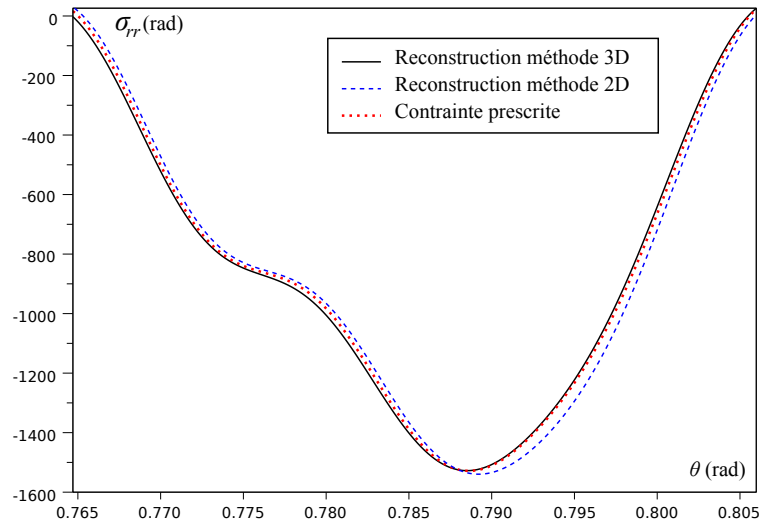
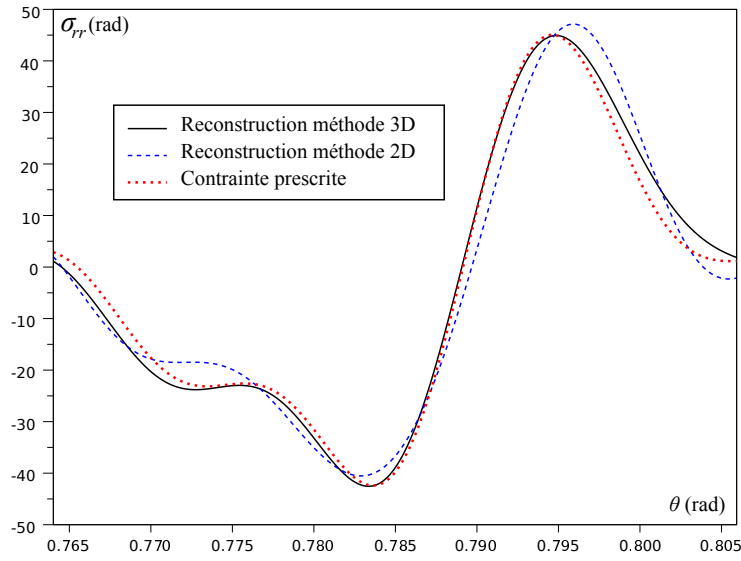


FIGURE 9.9 – Comparaison des solutions inverses 2D et 3D pour σ_{rr} en $z = l/2$

4. nous ne pouvons pas profiter d'un équilibre global

FIGURE 9.10 – Comparaison des solutions inverses 2D et 3D pour $\sigma_{r\theta}$ en $z = l/2$

9.14. Conclusion

La méthode analytique inverse tridimensionnelle que nous avons développée se fonde sur une approche en potentiels harmoniques et bi-harmoniques portant sur les déplacements. Les développements en double série de Fourier sont utilisés pour traiter la mesure des contraintes au rayon R_m . Une expression explicite entièrement analytique est obtenue pour les contraintes de contact. Cette expression fait intervenir l'inversion de matrices de taille 3×3 , dont la norme augmente avec les indices de sommation. Le fait que la méthode inverse est mal posée s'exprime en ces termes. De plus pour les termes $p = 0$, correspondant en fait à une solution bidimensionnelle, une erreur commise dans le calcul d'intégrale est multipliée par des facteurs du type $(R_s/R_m)^n$ comme au chapitre 4.

Nous avons testé la méthode sur une simulation de laminage à froid particulièrement difficile (signaux très singuliers). Nous avons discuté le nombre de capteurs nécessaires pour obtenir une bonne reconstruction des effets de bord près des rives de la bande, et pour obtenir toutes les contraintes de contact. La reconstruction dans ces conditions est excellente. Et le temps de calcul très réduit (0.5 seconde pour le calcul d'une double fft, il faut imaginer que trois processeurs peuvent être mis en parallèle). En revanche si le problème est sous-déterminé avec un nombre plus restreint de capteurs les effets de bord ne peuvent pas être reconstruits. Sur les parties restantes la reconstruction est cependant précise.

Nous avons cherché à déterminer dans quelle mesure la méthode 3D est supérieure à son homologue en 2D. Le principal critère est le temps de calcul, en effet pour $N_z^m = 50$ capteurs, appliquer la méthode 3D coûte 0.5 seconde environ alors qu'utiliser plusieurs fois la méthode 2D coûte environ 3.5 secondes. Par ailleurs, le fait que les contraintes s'équilibrent aux appuis et non directement sur chacune des tranches confère à la méthode 3D un niveau de précision légèrement supérieur. Une étude nécessaire, à développer pour la méthode inverse 2D, sera l'équilibrage du chargement non pas à la surface en symétrisant les signaux comme nous l'avons fait ici, mais en imposant une force ponctuelle au centre. Cela peut se faire en considérant un disque troué chargé identiquement sur le cercle intérieur et extérieur. Les potentiels holomorphes doivent alors être développés en série de Laurent (avec les termes en $1/z^n$), puis nous devons faire tendre le rayon du cercle intérieur vers zéro.

CHAPITRE X

ÉVALUATION DE LA TEMPÉRATURE ET DES FLUX EN 3D

Ce chapitre est adapté d'un article soumis à publication dans International Journal of Thermal Sciences (Weisz-Patrault et al. (2013c)). Nous étendons en trois dimensions la méthode inverse analytique du chapitre 5. Nous nous fondons sur les mêmes raisonnements. De même qu'au chapitre précédent, nous supposons que plusieurs capteurs sont insérés sous la surface du cylindre et alignés selon l'axe. Cette extension en trois dimensions permet de tenir compte d'éventuels gradients de température selon l'axe du cylindre. Nous avons fait l'hypothèse de flux axiaux nuls aux extrémités du cylindre, car aucune donnée n'y est mesurée. Une autre solution simple avec des flux moyens aux extrémités peut être ajoutée pour corriger cette hypothèse si nécessaire. Nous testons la solution en imposant un champ de température analytique prescrit dans tout le cylindre, présentant une variation selon z . La reconstruction en surface est très satisfaisante, que les données d'entrées soient bruitées ou non. Comme pour le chapitre 5, la méthode est très robuste au bruit, même si toutes les fréquences sont altérées. Le temps de calcul est optimisé pour être le plus réduit possible (0.05 s/tour). De même qu'au chapitre précédent des doubles fft sont à calculer.

10.1. Introduction

La motivation de cette étude, qui généralise au cas tridimensionnel le chapitre 5, est que les champs de température sont souvent hétérogènes selon l'axe du cylindre. Cette hétérogénéité est souvent voulue par le lamineur qui contrôle de manière hétérogène le système de refroidissement des cylindres pour ajuster les déformations thermiques du cylindre (bombé thermique). Par ailleurs, des bandes de largeurs très variées sont laminées au cours de la même campagne, créant ainsi des hétérogénéités supplémentaires selon l'axe. Or, la prédiction des défauts de planéité est très dépendante des déformations thermiques, dans la mesure où ces défauts ont pour origine la différence entre le profil du produit entrant et le profil géométrique de l'entrefer. Ainsi, la connaissance des déformations thermiques en trois dimensions, permet de compléter les déformations que nous pouvons obtenir grâce au champ de contrainte élastique identifié par la solution inverse du chapitre précédent, en résolvant l'équation de Navier (dont les coefficients de Lamé sont notés (λ_0, μ_0) , pour ne pas être confondus avec la conductivité thermique λ).

$$\mu_0 \mathbf{div} [\underline{\nabla} \mathbf{u}] + (\lambda_0 + \mu_0) \nabla [\mathbf{div} \mathbf{u}] = \alpha(3\lambda_0 + 2\mu_0) \nabla T \quad (10.1)$$

L'idée de ce chapitre est donc la même, nous considérons que plusieurs thermocouples sont insérés sous la surface du cylindre au rayon r_m et disposés à différentes positions axiales comme le montre la figure 10.1. Nous ne reprenons pas la revue bibliographique du chapitre 5. De même que pour le problème élastique du chapitre précédent, très peu de travaux se concentrent sur la formulation d'une méthode inverse complètement tridimensionnelle. Certains travaux sont exprimés en deux dimensions, selon r et z et en formulant de manière lagrangienne, la rotation du plan (r, z) donne une dépendance selon θ . C'est le cas des travaux de Hsu et al. (2000) et Keanini (1998), mais l'équation de la chaleur est simplifiée (toutes les dérivations selon θ sont nulles). Une méthode inverse thermique numérique vraiment tridimensionnelle a été développée par Loulou and Artioukhine (2006) pour un cylindre creux qui ne tourne pas. La méthode est fondée sur un schéma itératif avec une régularisation pour stabiliser la solution (problème mal posé) et la minimisation des résidus en utilisant la technique du gradient conjugué sans contrainte. Le constat est que les besoins en mémoire vive et en capacité de calcul pour obtenir des temps raisonnables, sont assez critiques. La méthode inverse analytique que nous proposons ne souffre pas de ces exigences. Il est remarquable que nous n'ayons pas trouvé à ce jour de méthode inverse vraiment tridimensionnelle

adaptée au laminage. De même que pour le cas élastique, cela est dû au fait que la culture des ingénieurs et des chercheurs dans ce domaine est tournée vers les schémas itératifs, qui dans ces conditions sont très coûteux.

TABLE 10.1 – Nomenclature

R_s	Rayon du cylindre	N_1	Ordre de troncature
r_m	Rayon de mesure	N_2	Ordre de troncature
L	Demi longueur du cylindre	P_1	Ordre de troncature
l	Demi longueur de la bande	P_2	Ordre de troncature
ω	Vitesse de rotation	Q_1	Ordre de troncature
r, θ, z	Coordonnées polaires	Q_2	Ordre de troncature
t	Temps	N_z^m	Nombre de thermocouples
k	Indice du tour	N_θ	Nombre de points de reconstruction selon θ
t_k	Temps au début du tour k , ($= t_{k-1} + 2\pi/\omega$)	N_z	Nombre de points de reconstruction selon z
t_θ^k	Temps lié à l'angle ($= t_k + \theta/\omega$)	$\zeta_{n,p}$	Coefficients
f	Fréquence d'acquisition	$\chi_{n,p}$	Coefficients
λ	Conductivité thermique	J_n	Fonction de Bessel d'ordre n
D	Diffusivité thermique	$\alpha_{n,p,q}^{(k)}$	Coefficients
ϵ	Erreur de reconstruction	$\beta_{n,p,q}^{(k)}$	Coefficients
T	Température (solution)	$a_{n,p}$	Coefficients
H	Flux de chaleur (solution)	$b_{n,p}$	Coefficients
T_1	Partie 1 de la température	$c_{n,p,q}$	Coefficients
T_2	Partie 2 de la température	$d_{n,p,q}$	Coefficients
T^m	Température mesurée	h_n	Fonction auxiliaire
$A_{n,p}^k$	n, p ième coefficient de Fourier de T^m (cosinus)	$x_{n,q}$	Racines positives et successives de J_n
$B_{n,p}^k$	n, p ième coefficient de Fourier de T^m (sinus)	$y_{n,q}$	Racines positives et successives de h_n
T^s	Température reconstruite en surface	γ	Coefficient
H^s	Flux reconstruit en surface	τ	Temps de relaxation
T^p	Champ de température prescrit	$\tau_{n,p,q}$	Temps de relaxation
T_a	Température ambiante	$v_{n,p,q}$	Temps de relaxation
T^*	Température environnante	$\tau_{n,p,q}^*$	Temps de relaxation
$a_{n,p}^*$	n, p ième coefficient de Fourier de T^* (cosinus)	$v_{n,p,q}^*$	Temps de relaxation
$b_{n,p}^*$	n, p ième coefficient de Fourier de T^* (sinus)	Θ	Angle
HTC	Coefficient de transfert thermique	u	Champ de déplacement

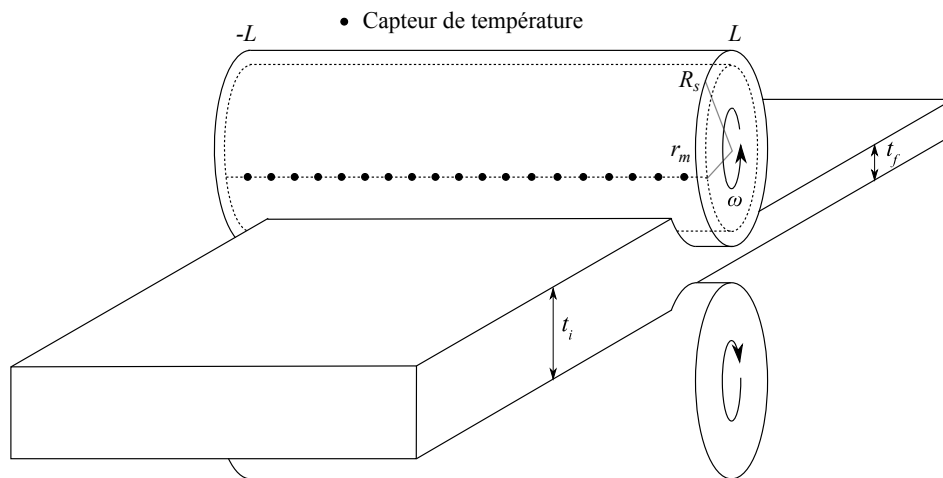


FIGURE 10.1 – Schéma du montage

Les données d'entrée sont les températures mesurées par les N_z thermocouples au rayon r_m . La solution permet d'évaluer la température et le flux dans tout le cylindre et en particulier à la surface. Toutes les composantes du flux sont accessibles. Contrairement à la solution élastique, aucune matrice n'est à inverser, et les commentaires que nous avons faits sur les facteurs d'amplification (qui expriment que la méthode inverse est mal posée) restent valables. Nous évaluons la qualité de la méthode comme au chapitre 5, c'est-à-dire en s'imposant un champ de température analytique solution de l'équation de la chaleur non stationnaire. Ce champ de température présente les aspects typiques d'un cas de laminage à chaud (bien qu'il ne s'agisse pas d'une simulation de laminage). Nous extrayons, de ce champ, la température au rayon r_m en N_z positions axiales. Nous prenons en compte le fait que les mesures sont faites successivement. Ces signaux constituent les données d'entrée, et nous appliquons la solution analytique développée dans ce chapitre. La température reconstruite en surface est ensuite comparée à la température du champ prescrit évaluée à la surface. Nous obtenons d'excellents résultats, pour des données sans bruit et fortement bruitées.

10.2. Intervalles de temps

Nous rappelons un élément essentiel du chapitre 5 : les mesures de températures sont faites à des instants successifs. La rotation du cylindre permet d'obtenir des données sur plusieurs cercles (à des positions axiales différentes correspondant aux emplacements des thermocouples). En revanche, à chaque instant, nous ne connaissons pas tout un cercle de température. A chaque position angulaire, la température est connue à un temps particulier (selon la fréquence d'acquisition f et la vitesse de rotation ω). La durée d'un tour constitue un temps caractéristique du problème. C'est la raison pour laquelle nous subdivisons l'intervalle de temps total en sous intervalles de durée d'un tour $[t_k, t_{k+1}]$ où t_k est le temps au début du tour indicé par k . Donc nous avons de manière évidente $t_k = t_{k-1} + 2\pi/\omega$, si l'on considère que la vitesse de rotation est constante pendant la durée de chaque tour (mais peut varier d'un tour à l'autre). Nous notons les températures mesurées $T^m(\theta, z, k)$. Toutes les autres notations sont listées dans le tableau 10.1.

10.3. Problème

La solution de l'équation non stationnaire de la chaleur est notée $T(r, \theta, z, t, k)$. Les variables t et k sont liées par le fait que $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Nous notons la diffusivité thermique D (m²/s) et nous la supposons indépendante de la température. Nous avons évoqué dans la conclusion du chapitre 5 une manière de tenir compte de variations modérées des paramètres thermiques en fonction de la température, mais cette question n'est pas étudiée en détail, car cela n'a pas été nécessaire pour la solution 2D. Nous résolvons l'équation de la chaleur démontrée au chapitre 8 :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (10.2)$$

Avec l'ensemble de conditions suivantes :

$$\begin{cases} (r, \theta, z, t, k) \in [0, R_s] \times [0, 2\pi[\times [-L, L] \times [t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{N}^* \\ T(r, \theta, t_k, z, k) = \begin{cases} T_a & k = 1 \\ T(r, \theta, t_k, z, k-1) & k \geq 2 \end{cases} \quad (\text{condition initiale}) \\ T(R_s, \theta, z, t, k) \text{ (conditions aux limites inconnues)} \\ \frac{\partial T}{\partial z}(r, \theta, \pm L, t, k) = 0 \end{cases} \quad (10.3)$$

Pour le premier tour, la condition initiale est la température ambiante dans le cylindre. Pour les tours suivants, la condition initiale est le champ de température dans tout le cylindre à la fin du tour précédent. Nous prenons comme conditions aux limites aux extrémités du cylindre (c'est-à-dire en $z = \pm L$) un flux axial nul. Cette hypothèse est faite principalement parce qu'aucune mesure n'est réalisée sur les bords (du fait de l'emmanchement du cylindre dans son axe de rotation). Il s'agit de l'hypothèse la plus raisonnable, car à partir de la solution développée, nous pouvons ajouter une correction qui impose des flux axiaux moyens aux extrémités du cylindre (de la même manière que nous avons imposé des résultantes du vecteur contrainte dans le chapitre précédent). Nous verrons à la section 10.6, comment faire en sorte que la condition de flux nul soit automatiquement vérifiée. Entre temps nous ne mentionnons plus cette condition.

Pour résoudre (10.2) avec les conditions (10.3), le domaine spatial est divisé en deux parties :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 = [0, r_m] \times [0, 2\pi[\times [-L, L] \\ \mathcal{D}_2 =]r_m, R_s] \times [0, 2\pi[\times [-L, L] \end{cases} \quad (10.4)$$

Nous redéfinissons donc les conditions :

$$\text{(Parite directe)} : \begin{cases} (r, \theta, z, t, k) \in \mathcal{D}_1 \times [t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{N}^* \\ T(r, \theta, z, t_k, k) = \begin{cases} T_a & k = 1 \\ T(r, \theta, z, t_k, k-1) & k \geq 2 \end{cases} \quad \text{(condition initiale)} \\ T(r_m, \theta, z, t_k, k) = T^m(\theta, z, k) \quad \text{(conditions mesurées)} \end{cases} \quad (10.5)$$

$$\text{(Partie inverse)} : \begin{cases} (r, \theta, z, t, k) \in \mathcal{D}_2 \times [t_k, t_{k+1}] \times \mathbb{N}^* \\ T(r, \theta, z, t_k, k) = \begin{cases} T_a & k = 1 \\ T(r, \theta, z, t_k, k-1) & k \geq 2 \end{cases} \quad \text{(condition initiale)} \end{cases} \quad (10.6)$$

10.4. Famille de solutions

Puisque le problème est linéaire, nous pouvons rechercher des solutions de l'équation non stationnaire de la chaleur sous forme de série de solutions élémentaires. Nous démontrons (preuve au chapitre 8) que la fonction donnée par (10.7) est solution de (10.2).

$$\gamma J_n \left(r \sqrt{\frac{1}{D\tau} - \frac{i\omega n}{D} + \delta^2} \right) \exp(in\theta) \exp(\delta z) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (10.7)$$

où n est un entier, γ , τ et δ sont des nombres complexes, et J_n est la n ième fonction de Bessel de première espèce définie pour une variable complexe (cf chapitre 2). Il doit être noté que l'expression (10.7) reste une solution en prenant $\delta = -\delta$ donc $\exp(\delta z)$ peut être remplacée par $\cos(\delta z)$ ou $\sin(\delta z)$.

10.5. Solution analytique sur chaque tour

Il est très classique de décomposer la solution en deux termes $T = T_1 + T_2$. Le premier terme est la solution stationnaire pour le tour k et T_2 est la solution transitoire correctrice, comme proposé parmi un très grand nombre d'auteurs par Hello and Vinet (1990). La solution T_1 vérifie la condition imposée par les mesures dans (10.5), mais nous n'imposons pas de conditions initiales spécifiques. T_2 vérifie donc la condition initiale de (10.5) et (10.6) à laquelle nous soustrayons le champ de température initial du à la solution T_1 . Par ailleurs T_2 doit s'annuler en r_m . Cette décomposition est présentée figure 10.2.

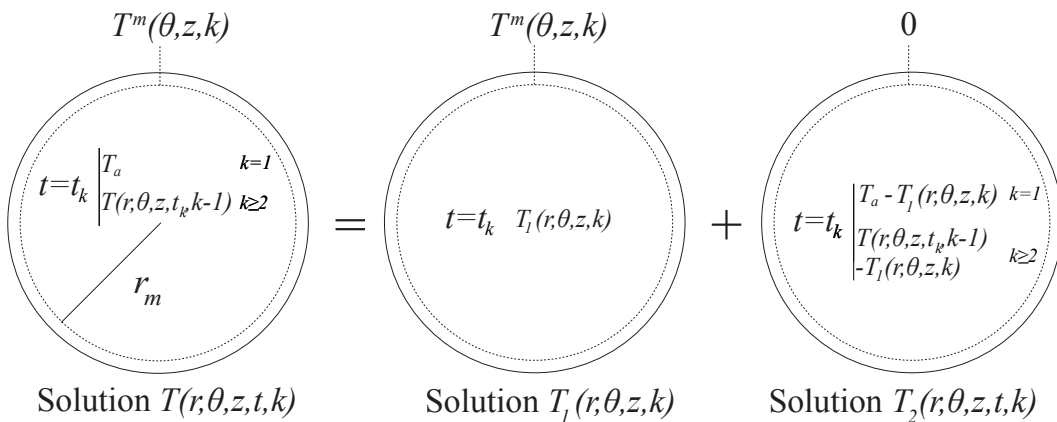


FIGURE 10.2 – Superposition pour chaque tour

Nous exposons ici directement la solution, la démonstration est faite dans les sections qui suivent. Nous proposons la solution sous forme d'une série de fonctions du type (10.7) (solutions de l'équation de la chaleur non stationnaire). Cette solution vérifie l'ensemble des conditions de (10.5) et (10.6). La solution est exacte, à l'hypothèse près que le champ de température varie peu pendant la durée d'un tour. Cette hypothèse n'est pas faite pour des raisons mathématiques, mais vient des restrictions du système de mesure que nous considérons. Pour chaque tour k nous avons :

$$T(r, \theta, z, t, k) = T_1(r, \theta, z, k) + T_2(r, \theta, z, t, k) \quad (10.8)$$

où T_1 et T_2 sont données par (où les coefficients sont définis dans la suite du texte) :

$$T_1(r, \theta, z, k) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \sum_{p=0}^{P_1} \text{sinc}^g \left(\frac{n}{N_1} \right) \left[A_{n,p}^k \frac{J_n(\zeta_{n,p} r)}{J_n(\zeta_{n,p} r_m)} \cos \left(\frac{\pi p z}{L} \right) + B_{n,p}^k \frac{J_n(\chi_{n,p} r)}{J_n(\chi_{n,p} r_m)} \sin \left(\frac{(2p+1)\pi z}{2L} \right) \right] \exp(in\theta) \quad (10.9)$$

$$T_2(r, \theta, z, t, k) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=1}^{Q_1} \left[\alpha_{n,p,q}^{(k)} \exp \left(-\frac{t-t_k}{\tau_{n,p,q}} \right) \cos \left(\frac{p\pi z}{L} \right) + \beta_{n,p,q}^{(k)} \exp \left(-\frac{t-t_k}{v_{n,p,q}} \right) \sin \left(\frac{(2p+1)\pi z}{2L} \right) \right] J_n \left(x_{n,q} \frac{r}{r_m} \right) \exp(in\theta) \quad (10.10)$$

Toutes les composantes du flux s'obtiennent très simplement en prenant le gradient de cette expression :

$$\mathbf{H}(r, \theta, z, t, k) = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) (r, \theta, z, t, k) \quad (10.11)$$

La température reconstruite en surface est notée $T^s(\theta, z, t, k) = T(R_s, \theta, z, t, k)$ et le flux de chaleur reconstruit dans toutes les directions $\mathbf{H}^s(\theta, z, t, k) = \mathbf{H}(R_s, \theta, z, t, k)$. La procédure à chaque tour pour obtenir ces sorties du calcul est présentée figure 10.3.

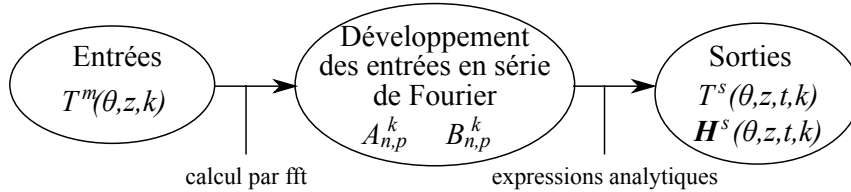


FIGURE 10.3 – Procédure pour chaque tour

10.6. Solution stationnaire réactualisée à chaque tour

Exactement pour les mêmes raisons qu'au chapitre 5, nous devons faire l'hypothèse que la solution T_1 ne dépend pas de t au cours d'un tour. La solution dépend néanmoins du temps par l'intermédiaire de k , elle ne varie que d'un tour à l'autre. Ainsi la solution $T_1(r, \theta, z, k)$ peut être déterminée grâce à la famille de solutions simplifiée :

$$\gamma J_n \left(r \sqrt{-\frac{i\omega n}{D} + \delta^2} \right) \exp(in\theta) \exp(\delta z) \quad (10.12)$$

$T_1(r, \theta, z, k)$ est solution de (10.2) avec le nouvel ensemble de conditions aux limites, qui cette fois sont complètes donc bien définies :

$$\begin{cases} (r, \theta, z, k) \in \mathcal{D}_1 \times \mathbb{N}^* \\ T_1(r_m, \theta, z, k) = T^m(\theta, z, k) \text{ (conditions mesurées)} \end{cases} \quad (10.13)$$

Pour chaque tour, les signaux mesurés $T^m(\theta, z, k)$ sont développés en double série de Fourier. Cependant nous modifions l'écriture classique pour faire en sorte que le flux axial en $z = \pm L$ s'annule automatiquement (sommes finies). Cette modification du développement est parfaitement licite. Nous pouvons noter que ce raffinement n'est pas strictement nécessaire, nous aurions pu vérifier la condition de flux nul en moyenne seulement, et un développement en séries de Fourier classiques aurait suffi. Cependant, ce développement permettant de vérifier localement le flux nul aux bords du cylindre ne coûte rien de plus ni théoriquement ni pratiquement. Nous avons donc :

$$T^m(\theta, z, k) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \sum_{p=0}^{P_1} \left[A_{n,p}^k \cos\left(\frac{p\pi z}{L}\right) + B_{n,p}^k \sin\left(\frac{(2p+1)\pi z}{2L}\right) \right] \exp(in\theta) \quad (10.14)$$

où N_1 et P_1 sont des entiers et $A_{n,p}^k$ et $B_{n,p}^k$ sont les coefficients de Fourier de la température mesurée au tour k , nous avons :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall p \geq 1, \quad & \begin{cases} A_{n,p}^k = \frac{1}{2L\pi} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} T^m(\theta, z, k) \exp(-in\theta) \cos\left(\frac{p\pi z}{L}\right) d\theta dz \\ B_{n,p}^k = \frac{1}{2L\pi} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} T^m(\theta, z, k) \exp(-in\theta) \sin\left(\frac{(2p+1)\pi z}{2L}\right) d\theta dz \end{cases} \\ \forall n, \in \mathbb{Z} \quad & \begin{cases} A_{n,0}^k = \frac{1}{4L\pi} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} T^m(\theta, z, k) \exp(-in\theta) d\theta dz \\ B_{n,0}^k = \frac{1}{2L\pi} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} T^m(\theta, z, k) \exp(-in\theta) \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right) d\theta dz \end{cases} \end{aligned} \quad (10.15)$$

Les coefficients (10.15) peuvent être calculés en pratique par des fft. Cependant (particulièrement pour les tout premiers tours) la température en début de tour est plus faible qu'à la fin du tour, créant ainsi une discontinuité responsable d'un effet Gibbs. Comme nous l'avons proposé au chapitre 5, ce type d'effet peut être réduit en multipliant par un sinus cardinal dans le développement (9.40), comme le suggèrent Lanczos (1961) et Acton (1990, p.227)). Nous avons donc :

$$T^m(\theta, z, k) \simeq \sum_{n=-N_1}^{N_1} \sum_{p=0}^{P_1} \text{sinc}^g\left(\frac{n}{N_1}\right) \left[A_{n,p}^k \cos\left(\frac{p\pi z}{L}\right) + B_{n,p}^k \sin\left(\frac{(2p+1)\pi z}{2L}\right) \right] \exp(in\theta) \quad (10.16)$$

où g est un nombre positif (dans la suite $g = 1$) et $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Les oscillations restantes sont tout simplement coupées du signal. Pour chaque tour, nous identifions les mesures développées en double série de Fourier avec une série de fonctions du type (10.7) (solutions de (10.2)) qui vérifie la condition au limite en r_m . Nous avons :

$$\begin{aligned} T_1(r, \theta, z, k) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \sum_{p=0}^{P_1} \text{sinc}^g\left(\frac{n}{N_1}\right) & \left[A_{n,p}^k \frac{J_n(\zeta_{n,p}r)}{J_n(\zeta_{n,p}r_m)} \cos\left(\frac{p\pi z}{L}\right) \right. \\ & \left. + B_{n,p}^k \frac{J_n(\chi_{n,p}r)}{J_n(\chi_{n,p}r_m)} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi z}{2L}\right) \right] \exp(in\theta) \end{aligned} \quad (10.17)$$

où $\zeta_{n,p}$ et $\chi_{n,p}$ sont définis par :

$$\begin{cases} \zeta_{n,p} = \sqrt{-\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 - \frac{i\omega n}{D}} \\ \chi_{n,p} = \sqrt{-\left(\frac{(2p+1)\pi}{2L}\right)^2 - \frac{i\omega n}{D}} \end{cases} \quad (10.18)$$

Cette partie de la solution est exactement la solution stationnaire de l'équation de la chaleur, mais mise à jour à chaque tour. Nous pouvons noter que le flux axial s'annule bien en $z = \pm L$ comme le requiert la condition (10.3).

10.7. Solution transitoire

T_1 ne vérifie pas la condition initiale de (10.5) et (10.6). Une solution transitoire correctrice T_2 est donc requise. Cette dernière solution doit vérifier la condition initiale à laquelle on soustrait la condition initiale de la solution T_1 . Par ailleurs T_2 doit s'annuler en r_m , ainsi si l'on note $x_{n,q}$ les racines positives et ordonnées de la fonction de Bessel d'ordre n , alors T_2 peut être recherchée sous la forme d'une série de Fourier-Bessel :

$$T_2(r, \theta, z, t, k) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=1}^{Q_1} \left[\alpha_{n,p,q}^{(k)} \exp\left(-\frac{t-t_k}{\tau_{n,p,q}}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{L}\right) + \beta_{n,p,q}^{(k)} \exp\left(-\frac{t-t_k}{v_{n,p,q}}\right) \sin\left(\frac{(2p+1)\pi z}{2L}\right) \right] J_n\left(x_{n,q} \frac{r}{r_m}\right) \exp(in\theta) \quad (10.19)$$

où N_2 est un entier, $\alpha_{n,p,q}^{(k)}$ et $\beta_{n,p,q}^{(k)}$ sont des nombres complexes et les taux de relaxation $\tau_{n,p,q}$ et $v_{n,p,q}$ sont donnés par :

$$\begin{cases} \tau_{n,p,q} = \frac{1}{D} \left(\left(\frac{x_{n,q}}{r_m} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 + \frac{i\omega n}{D} \right)^{-1} \\ v_{n,p,q} = \frac{1}{D} \left(\left(\frac{x_{n,q}}{r_m} \right)^2 + \left(\frac{(2p+1)\pi}{2L} \right)^2 + \frac{i\omega n}{D} \right)^{-1} \end{cases} \quad (10.20)$$

Nous pouvons réécrire la condition initiale de (10.5) et (10.6) comme suit (rappelant que $t_1 = 0$) :

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^{Q_1} \alpha_{n,p,q}^{(k)} J_n\left(x_{n,q} \frac{r}{r_m}\right) = u_{n,p}^{(k)}(r) \\ \sum_{q=1}^{Q_1} \beta_{n,p,q}^{(k)} J_n\left(x_{n,q} \frac{r}{r_m}\right) = v_{n,p}^{(k)}(r) \end{cases} \quad (10.21)$$

où :

$$\begin{cases} u_{0,0}^{(k)}(r) = T_a - A_{0,0}^k & k = 1 \\ u_{n,p}^{(k)}(r) = -\text{sinc}^g\left(\frac{n}{N_1}\right) A_{n,p}^k \frac{J_n(\zeta_{n,p}r)}{J_n(\zeta_{n,p}r_m)} & k = 1 \\ u_{n,p}^{(k)}(r) = \sum_{q=1}^{Q_1} \alpha_{n,p,q}^{(k-1)} \exp\left(-\frac{t_k - t_{k-1}}{\tau_{n,p,q}}\right) J_n\left(x_{n,q} \frac{r}{r_m}\right) + \text{sinc}^g\left(\frac{n}{N_1}\right) (A_{n,p}^{k-1} - A_{n,p}^k) \frac{J_n(\zeta_{n,p}r)}{J_n(\zeta_{n,p}r_m)} & k \geq 2 \end{cases} \quad (10.22)$$

$$\begin{cases} v_{0,0}^{(k)}(r) = -B_{0,0}^k \frac{J_0(\chi_{0,0}r)}{J_0(\chi_{0,0}r_m)} & k = 1 \\ v_{n,p}^{(k)}(r) = -\text{sinc}^g\left(\frac{n}{N_1}\right) B_{n,p}^k \frac{J_n(\chi_{n,p}r)}{J_n(\chi_{n,p}r_m)} & k = 1 \\ v_{n,p}^{(k)}(r) = \sum_{q=1}^{Q_1} \beta_{n,p,q}^{(k-1)} \exp\left(-\frac{t_k - t_{k-1}}{v_{n,p,q}}\right) J_n\left(x_{n,q} \frac{r}{r_m}\right) + \text{sinc}^g\left(\frac{n}{N_1}\right) (B_{n,p}^{k-1} - B_{n,p}^k) \frac{J_n(\chi_{n,p}r)}{J_n(\chi_{n,p}r_m)} & k \geq 2 \end{cases} \quad (10.23)$$

Nous pouvons remarquer que pour le tour k , $u_{n,p}^{(k)}(r)$ et $v_{n,p}^{(k)}(r)$ sont des fonctions de r connues dans tout le domaine de variation de r (c'est-à-dire sur $[0, R_s]$). Les coefficients $\alpha_{n,p,q}^{(k)}$ et $\beta_{n,p,q}^{(k)}$ sont donnés par (10.24) sous forme analytique (appelée développement en série de Fourier-Bessel et introduite au chapitre 2) utilisée par

Sneddon (1966, p.37) et démontrée par Watson (1944, pp.591-594).

$$\begin{cases} \alpha_{n,p,q}^{(k)} = \frac{2}{r_m^2 J_{n+1}^2(x_{n,q})} \int_0^{r_m} \rho u_{n,p}^{(k)}(\rho) J_n\left(x_{n,q} \frac{\rho}{r_m}\right) d\rho \\ \beta_{n,p,q}^{(k)} = \frac{2}{r_m^2 J_{n+1}^2(x_{n,q})} \int_0^{r_m} \rho v_{n,p}^{(k)}(\rho) J_n\left(x_{n,q} \frac{\rho}{r_m}\right) d\rho \end{cases} \quad (10.24)$$

En utilisant le résultat (10.25) donné entre autres par Sneddon (1966, p.27) et (10.26) donné par Gradshteyn and Ryzhik (1992) les expressions de $\alpha_{n,p,q}^{(k)}$ et $\beta_{n,p,q}^{(k)}$ deviennent (10.27) et (10.28).

$$\int_0^{r_m} \rho J_0(x\rho) d\rho = r_m \frac{J_1(r_m x)}{x} \quad (10.25)$$

$$\begin{cases} \int_0^{r_m} \rho J_n(x\rho) J_n(y\rho) d\rho = r_m \frac{x J_{n+1}(r_m x) J_n(r_m y) - y J_{n+1}(r_m y) J_n(r_m x)}{x^2 - y^2} \\ \int_0^{r_m} \rho J_n(x\rho)^2 d\rho = \frac{r_m^2}{2} (J_n(r_m x)^2 - J_{n-1}(r_m x) J_{n+1}(r_m x)) \end{cases} \quad (10.26)$$

$$\begin{cases} \alpha_{0,0,q}^{(k)} = \frac{2}{J_1(x_{0,q})} \frac{T_a - A_{0,0}^k}{x_{0,q}} & k = 1 \\ \alpha_{n,p,q}^{(k)} = \frac{2}{J_{n+1}(x_{n,q})} \frac{\text{sinc}^g(n/N_1) A_{n,p}^k}{r_m^2 \zeta_{n,p}^2 x_{n,q}^{-1} - x_{n,q}} & k = 1 \\ \alpha_{n,p,q}^{(k)} = -\alpha_{n,p,q}^{(k-1)} \exp\left(\frac{t_k - t_{k-1}}{\tau_{n,p,q}}\right) \frac{J_{n-1}(x_{n,q})}{J_{n+1}(x_{n,q})} & k \geq 2 \\ \quad + \frac{2}{J_{n+1}(x_{n,q})} \frac{\text{sinc}^g(n/N_1) (A_{n,p}^k - A_{n,p}^{k-1})}{r_m^2 \zeta_{n,p}^2 x_{n,q}^{-1} - x_{n,q}} \end{cases} \quad (10.27)$$

$$\begin{cases} \beta_{0,0,q}^{(k)} = \frac{2}{J_1(x_{0,q})} \frac{B_{0,0}^k}{r_m^2 \chi_{0,0}^2 x_{0,q}^{-1} - x_{0,q}} & k = 1 \\ \beta_{n,p,q}^{(k)} = \frac{2}{J_{n+1}(x_{n,q})} \frac{\text{sinc}^g(n/N_1) B_{n,p}^k}{r_m^2 \chi_{n,p}^2 x_{n,q}^{-1} - x_{n,q}} & k = 1 \\ \beta_{n,p,q}^{(k)} = -\beta_{n,p,q}^{(k-1)} \exp\left(\frac{t_k - t_{k-1}}{v_{n,p,q}}\right) \frac{J_{n-1}(x_{n,q})}{J_{n+1}(x_{n,q})} & k \geq 2 \\ \quad + \frac{2}{J_{n+1}(x_{n,q})} \frac{\text{sinc}^g(n/N_1) (B_{n,p}^k - B_{n,p}^{k-1})}{r_m^2 \chi_{n,p}^2 x_{n,q}^{-1} - x_{n,q}} \end{cases} \quad (10.28)$$

10.8. Commentaire

Comme pour la solution inverse thermique 2D du chapitre 5, si une longue bande est laminée sans interruption, nous pouvons considérer que la température mesurée au rayon r_m du tour courant (d'indice k) est proche de la température mesurée pour n'importe quel tour précédent, du fait que l'évolution de la carte de température est lente. Il n'est donc pas nécessaire dans ce cas de redéfinir la condition initiale à chaque tour. Dans ce cas, seuls les $\alpha_{n,p,q}^{(1)}$ et $\beta_{n,p,q}^{(1)}$ sont calculés et sont utilisés pour tous les tours suivants (évidemment de ce fait nous ne considérons plus $t - t_k$ mais uniquement t dans T_2). Donc chaque tour peut être calculé sans calculer tous les tours précédents. Cette technique est utilisée dans les simulations présentées à la section 10.9 où le premier tour ainsi que le tour après 10 minutes de laminage sont calculés. En fait, il faut reprendre une nouvelle condition initiale, comme nous l'avons proposé, uniquement lorsqu'il y a un changement important des conditions de laminage, (fin d'une bande pour une nouvelle bande etc...), parce que dans ce cas le régime pseudo-permanent est rompu.

10.9. Validation de la solution

10.9.1. Champ de température analytique prescrit

La précision de la méthode que nous avons présentée, ainsi que sa robustesse au bruit de mesure, est démontrée comme suit. Un champ de température analytique, solution de l'équation non stationnaire de la chaleur, est prescrit et noté $T^p(r, \theta, z, t)$. Ce champ est formé pour correspondre à une situation de laminage à chaud de fortes épaisseurs (bien qu'il ne s'agisse pas à proprement parler d'une simulation de laminage). Nous extrayons de ce champ les données d'entrée en r_m aux positions z_j ($j \in \{1; \dots; N_z^m\}$) des capteurs considérés : $T^m(\theta, z_j, k) = T^p(r_m, \theta, z_j, t_\theta^k)$. Ensuite, comme nous l'avons fait dans tous les problèmes des précédents chapitres, nous interpolons le signal de sorte que l'on obtient $T^m(\theta, z, k)$. Nous utilisons la solution analytique pour calculer la température en surface que nous comparons à $T^p(R_s, \theta, z, t)$, grâce à une erreur de reconstruction quantifiée :

$$\epsilon = 100 \sqrt{\frac{\int_{-L}^L \int_0^{2\pi} [T^s(\theta, z, t_\theta^k) - T^p(R_s, \theta, z, t_\theta^k)]^2 d\theta dz}{\int_{-L}^L \int_0^{2\pi} [T^p(R_s, \theta, z, t_\theta^k)]^2 d\theta dz}} \quad (10.29)$$

La température prescrite est détaillée en annexe C, du fait de la longueur de la démonstration. Nous exposons simplement ici le résultat, à savoir un champ de température analytique vérifiant une condition en flux avec un coefficient de transfert thermique homogène sur la surface :

$$\begin{aligned} T^p(r, \theta, z, t) = & \sum_{n=-N_2}^{N_2} \sum_{p=0}^{P_2} \left[a_{n,p} J_n(\zeta_{n,p} r) \cos\left(\frac{\pi p z}{L}\right) + b_{n,p} J_n(\chi_{n,p} r) \sin\left(\frac{\pi(2p+1)z}{2L}\right) \right] \exp(in\theta) \\ & + \sum_{n=-N_2}^{N_2} \sum_{p=0}^{P_2} \sum_{q=1}^{Q_2} c_{n,p,q} J_n \left(r \sqrt{\frac{1}{D\tau_{n,p,q}^*} - \frac{i\omega n}{D} - \left(\frac{\pi p}{L}\right)^2} \right) \\ & \quad \times \exp\left(\frac{-t}{\tau_{n,p,q}^*}\right) \exp(in\theta) \cos\left(\frac{\pi p z}{L}\right) \\ & + \sum_{n=-N_2}^{N_2} \sum_{p=0}^{P_2} \sum_{q=1}^{Q_2} d_{n,p,q} J_n \left(r \sqrt{\frac{1}{Dv_{n,p,q}^*} - \frac{i\omega n}{D} - \left(\frac{\pi(2p+1)}{2L}\right)^2} \right) \\ & \quad \times \exp\left(\frac{-t}{v_{n,p,q}^*}\right) \exp(in\theta) \sin\left(\frac{\pi(2p+1)z}{2L}\right) \end{aligned} \quad (10.30)$$

où $y_{n,q}$ sont les racines positives et ordonnées de la fonction $y \mapsto h_n(y) = \lambda(y/R_s)J_n'(y) + \text{HTC} \times J_n(y)$ et $a_{n,p}$ et $b_{n,p}$ sont des nombres complexes donnés par (C.9), $c_{n,p,q}$ et $d_{n,p,q}$ des nombres complexes donnés par (C.13), où $\tau_{n,p,q}^*$ et $v_{n,p,q}^*$ sont donnés par (C.8), et N_2 , P_2 et Q_2 sont des entiers listés dans le tableau 10.2.

Le champ de température $T^p(r, \theta, z, t)$ donné par (10.30) s'écrit sous forme de (10.7) et correspond donc à une solution exacte de l'équation de la chaleur non stationnaire (10.2). $a_{n,p}$, $b_{n,p}$, $c_{n,p,q}$ et $d_{n,p,q}$ sont déterminés de manière à ce que $T^p(r, \theta, z, t)$ corresponde à un cylindre de température initiale T_a environné par T_a partout sauf dans un secteur angulaire et axial $(\theta, z) \in [\pi - \Theta, \pi + \Theta] \times [-L + Z, L - Z]$ où la température environnante est une rampe $T^*(\theta, z)$, comme on peut le voir figure C.1 (simulant le contact entre la tôle et le cylindre). Le flux entrant dans le cylindre est défini classiquement grâce à un coefficient de transfert thermique HTC. Nous avons considéré $\text{HTC} = 7 \times 10^{-4} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ constant sur tout le cylindre pour plus de simplicité, bien qu'en dehors du contact, cette valeur ne simule absolument pas l'interaction air/cylindre. Cependant, le champ résultant correspond bien à un pic de température obtenu en laminage. Nous nous servons donc de cette configuration pour tester la méthode. Les détails sur le calcul de $a_{n,p}$, $b_{n,p}$, $c_{n,p,q}$ et $d_{n,p,q}$ sont reportés en annexe C. Nous prenons $T^*(\theta, z)$ hétérogène selon l'axe du cylindre pour montrer que la solution permet de reconstruire de telles conditions.

Les paramètres du problème sont listés dans le tableau 10.2. La vitesse de rotation est fixée à 8π (rad/s) ou 6.4 m/s considérant le rayon du cylindre. Cette vitesse correspond à une situation industrielle assez sévère.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
N_1 (-)	50	N_z (-)	30	f (Hz)	1000
P_1 (-)	50	N_z^m (-)	30	T_a (K)	293.15
Q_1 (-)	200	R_s (m)	0.254	HTC ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$)	7×10^4
N_2 (-)	20	r_m (m)	0.2535	Θ (rad)	$\pi/10$
P_2 (-)	14	D (m^2/s)	6×10^{-6}	L (mm)	700
Q_2 (-)	200	λ ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)	52	l (mm)	500
N_θ (-)	100	ω (rad/s)	8π		

TABLE 10.2 – Valeurs de calcul

10.9.2. Reconstruction sans bruit

En utilisant (10.30), les données d'entrée sont calculées pour deux tours différents, le premier et celui après 10 minutes de laminage ininterrompues. La température prescrite en surface est présentée figure 10.4, celle extraite au rayon r_m est présentée figure 10.5. Les températures reconstruites par la méthode inverse analytique que nous avons développée sont comparées à la température prescrite en surface au figures 10.6 et 10.7. La reconstruction est très bonne, comme l'indique le tableau 10.3 listant les erreurs de reconstruction en pourcentage.

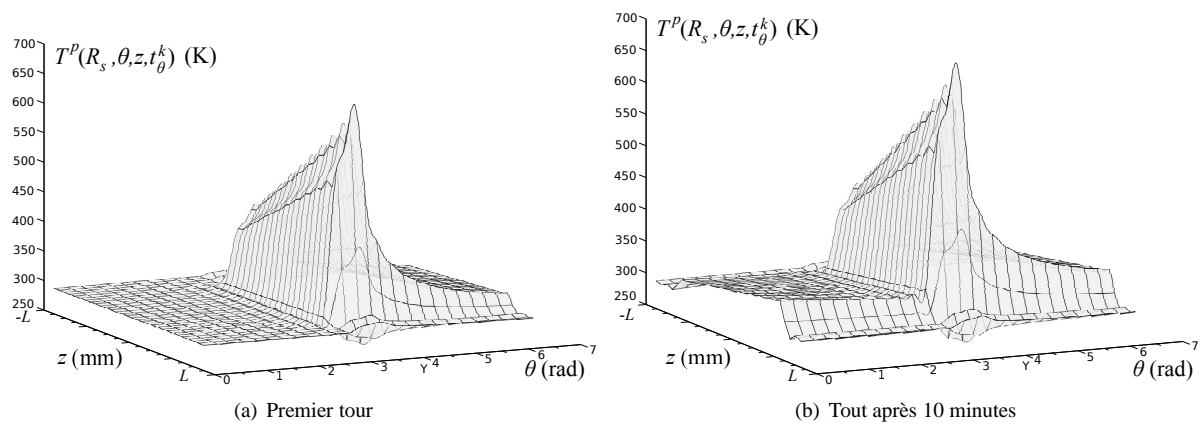
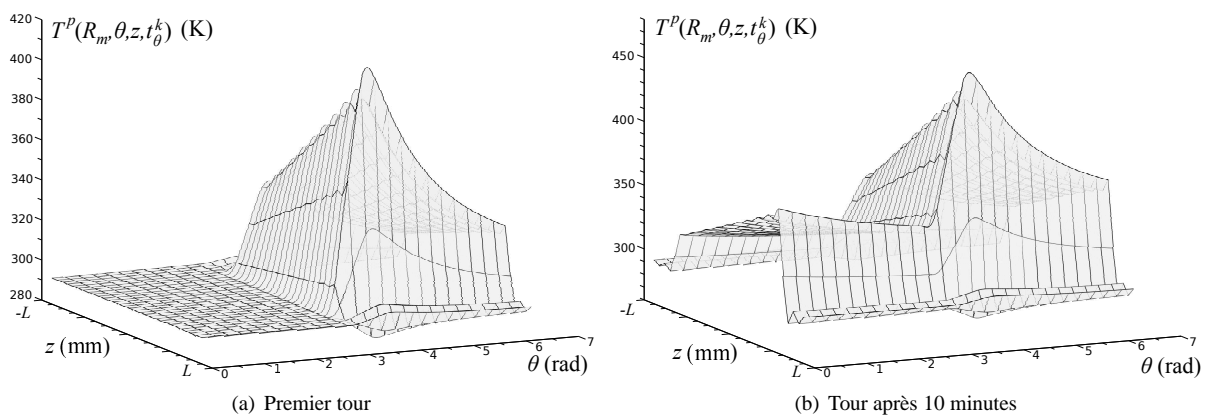


FIGURE 10.4 – Température prescrite en surface

FIGURE 10.5 – Température extraite au rayon r_m

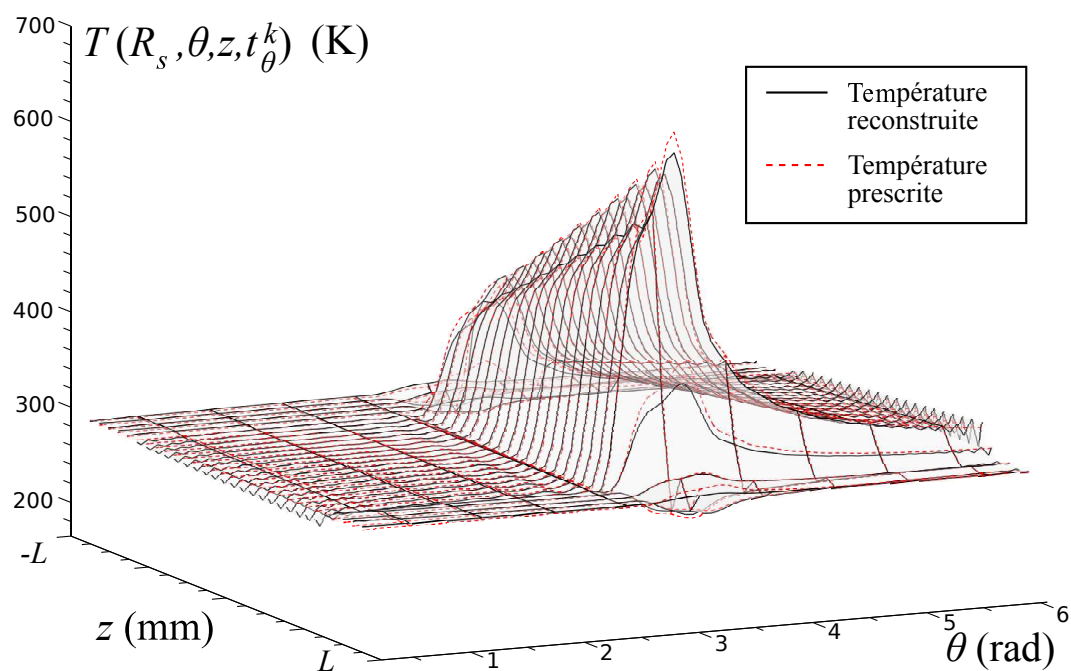


FIGURE 10.6 – Reconstruction en surface sans bruit au premier tour

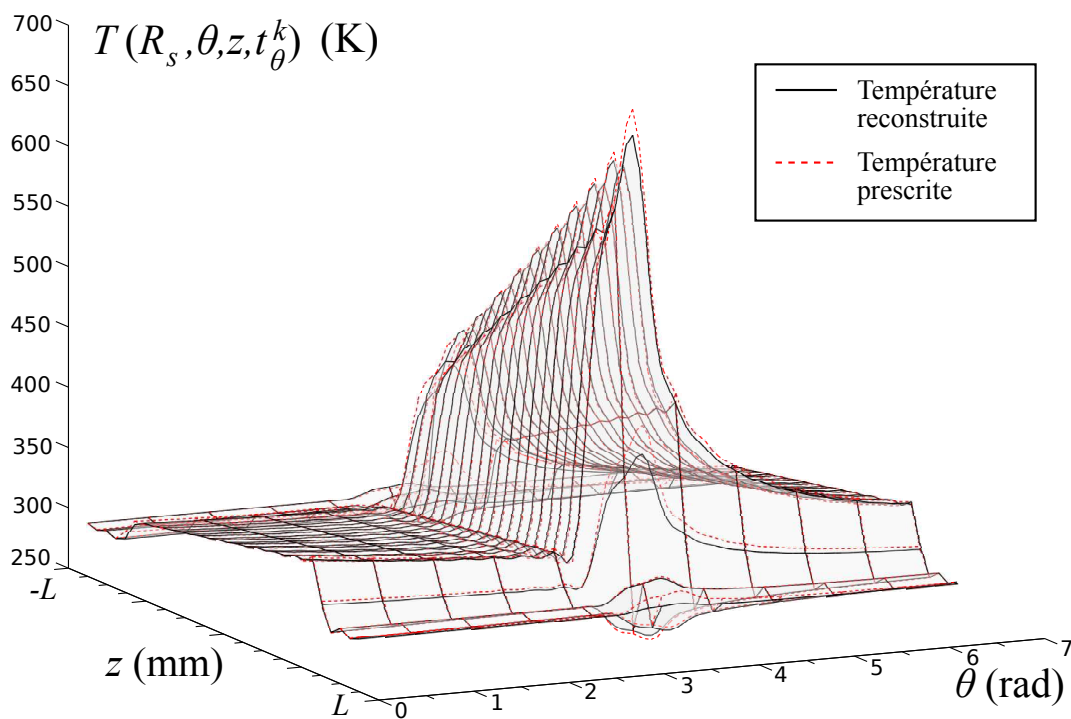


FIGURE 10.7 – Reconstruction en surface sans bruit au tour après 10 minutes

	ϵ			
	Sans bruit		Avec bruit	
Premier tour	1.1%	Fig.10.6	1.8%	Fig.10.8
Tour après 10 min	1.0%	Fig.10.7	1.7%	Fig.10.9

TABLE 10.3 – Erreurs de reconstruction

10.9.3. Robustesse au bruit de mesure

En pratique, les mesures sont bruitées. Comme au chapitre 5, la méthode inverse thermique est très robuste au bruit de mesure. Même si toutes les fréquences du signal d'entrée sont altérées, la reconstruction n'est pas compromise. Ainsi, nous ajoutons un bruit blanc de loi uniforme d'amplitude 1 K. Cette robustesse tient au fait que la température diffuse beaucoup plus que les contraintes élastiques, et s'étale donc sur une plage angulaire beaucoup plus importante, créant des signaux beaucoup moins singuliers. Mais cette robustesse au bruit tient surtout au fait que les facteurs d'amplification $J_n(\zeta_{n,p}R_s)/J_n(\zeta_{n,p}r_m)$ (méthode mal posée) que nous avons discutés au chapitre 5, divergent beaucoup plus lentement que ceux de la méthode élastique. La reconstruction de la température en surface est présentée figures 10.8 et 10.9. Les erreurs de reconstruction sont listées dans le tableau 10.3.

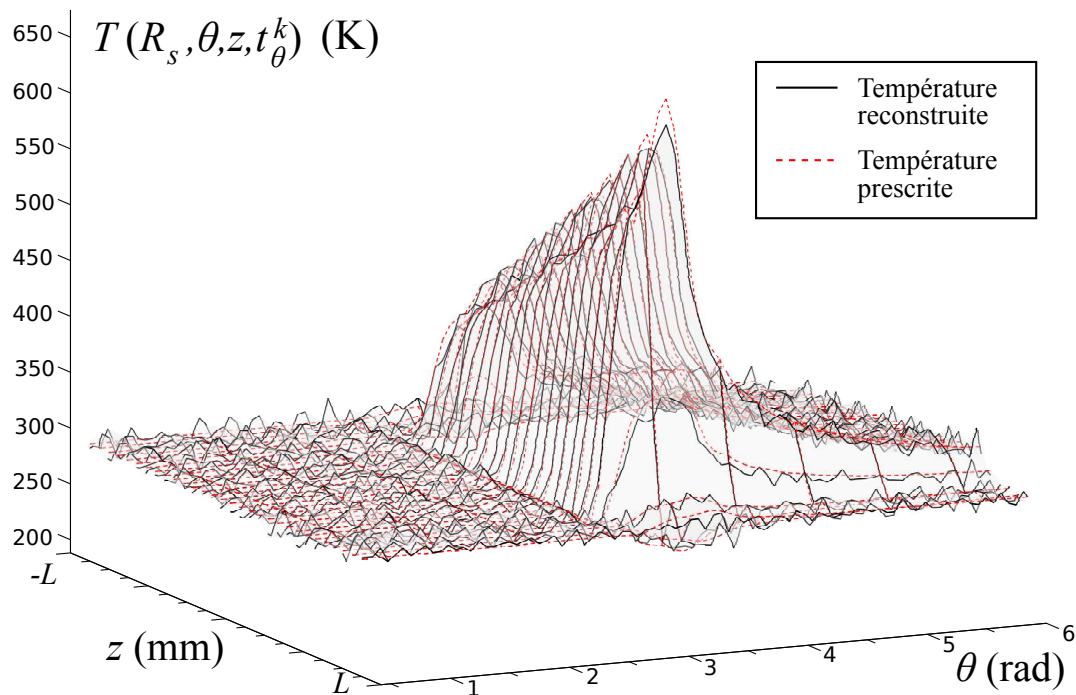


FIGURE 10.8 – Reconstruction en surface avec bruit au premier tour

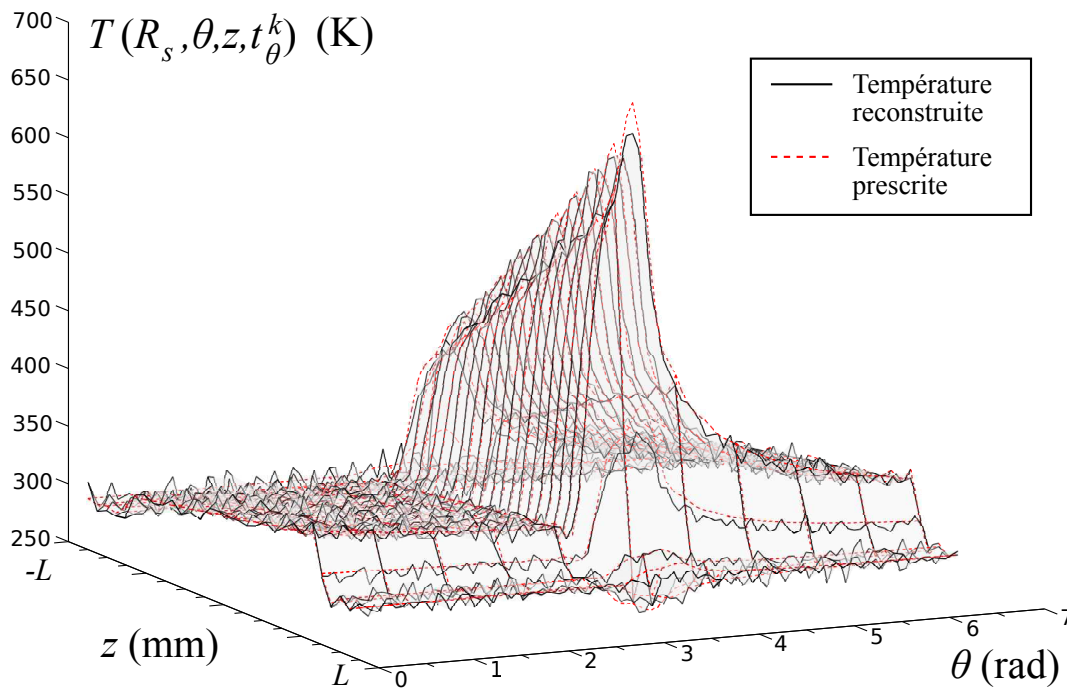


FIGURE 10.9 – Reconstruction en surface avec bruit au tour après 10 minutes

10.10. Temps de calcul

Pour optimiser le temps de calcul, nous programmons la solution (10.8) écrite (10.17)+(10.10) sous forme hypermatricielle. Ces hypermatrices peuvent être calculées avant le procédé. Les seules quantités à calculer on-line (c'est-à-dire pendant le procédé) sont les doubles fft pour l'évaluation des coefficients $A_{n,p}^k$ et $B_{n,p}^k$. Nous avons vu au chapitre précédent que la double fft implique plusieurs calcul de fft unidimensionnelles classiques. Nous pouvons réduire significativement le nombre des points d'interpolation selon z et θ sans compromettre la précision générale. Par exemple les résultats de ce chapitre ont été obtenus avec une interpolation de $N_z^i = 100$ points selon z et de $N_\theta^i = 1000$ selon θ . Le temps de la méthode inverse 3D affiché par Scilab 5.3 pour un processeur 2.8 GHz est de 0.07 seconde.

10.11. Conclusion

Nous avons développé l'extension naturelle en trois dimensions de la solution du chapitre 5. Nous supposons que plusieurs thermocouples sont fixés sous la surface du cylindre. De même que pour les chapitres précédents, la solution a été validée et les résultats sont très bons, que les données d'entrée soient bruitées ou non. La méthode est particulièrement robuste au bruit, puisqu'un bruit blanc altérant toutes les fréquences et d'amplitude 1 K ne compromet pas les résultats. Cette solution ne présente pas de complexité supplémentaire par rapport au cas 2D, alors que la solution élastique 3D présentait des complications spécifiques.

Nous rappelons que les développements qui précèdent sont faits avec une condition de flux nul aux extrémités du cylindre. Cette hypothèse est motivée par le fait que les sources de chaleur (tôle, frottement etc..) sont loin de cette zone. Il est néanmoins possible qu'un flux axial existe à long terme (laminage continu pendant une très longue durée). Nous n'avons pas envisagé que le flux moyen au bord soit évalué, mais si cela devait être le cas pour exploiter une mesure faite aux extrémités, il faudrait ajouter une solution supplémentaire pour corriger celle que nous avons établie.

Nous pouvons (avec une précision quasi-identique) utiliser la méthode 2D sur chaque tranche cylindrique où se trouvent les capteurs. Cela est du au fait que contrairement au cas élastique, le chargement sur une tranche cylindrique, n'a pas besoin d'être équilibré en thermique (alors que cela est nécessaire en élasticité). Pour la plupart

des cas de laminage, près de la surface le flux axial est extrêmement faible devant le flux radial, il n'y a donc pas de supériorité, en termes de précision, de la méthode 3D sur la méthode 2D dans ce type de cas. Cependant comme nous l'avons dit en introduction, une campagne de laminage fait intervenir des produits de différentes largeurs et des systèmes de refroidissements hétérogènes dans l'axe du cylindre. Ceci n'a pas été simulé (car nous ne disposons pas de simulations numériques tridimensionnelles), alors même qu'il s'agit de la motivation première de cette méthode. Des validations ultérieures doivent donc être menées dans ce sens.

En outre, la méthode 3D offre la possibilité d'évaluer le champ partout dans le cylindre et non simplement au niveau des tranches cylindriques où sont placés les capteurs. Ainsi, même avec un nombre limité de capteurs nous pouvons évaluer la déformation thermique du cylindre, partout le long de l'axe, dans l'optique d'un meilleur contrôle des systèmes tridimensionnels de refroidissement, pour un meilleur contrôle de la planéité. Par ailleurs, le flux de chaleur dans toutes les directions est connu analytiquement. Nous pouvons donc évaluer le refroidissement axial par le centre du cylindre.

Le principal avantage de cette méthode 3D sur la méthode 2D appliquée plusieurs fois, est qu'en un seul calcul de 0.07 seconde le champ de température et les flux sont connus dans tout le cylindre. Il est donc beaucoup plus économique, en termes de temps de calcul, d'utiliser la méthode 3D que plusieurs méthodes 2D.

CHAPITRE XI

CONCLUSION GÉNÉRALE

11.1. Conclusion

Nous avons cherché à montrer l'intérêt de la recherche de solutions analytiques dans un contexte industriel, champ disciplinaire où elles avaient pratiquement disparu du fait de la complexité des problèmes (en termes géométriques et physiques) et du fait de la culture des ingénieurs. Non seulement ces travaux mettent en lumière le fait que des solutions innovantes sont possibles grâce aux mathématiques analytiques, mais que ces dernières sont nécessaires (beaucoup plus rentables que les codes numériques) pour certains types d'applications.

Parmi eux, nous avons traité le cas du laminage des produits plats en acier, qui est l'un des procédés majeurs de l'industrie sidérurgique. Trois solutions analytiques inverses en deux dimensions, développées aux chapitres 4, 5 et 7, permettent d'interpréter les mesures de déformation et de température faites à l'intérieur du cylindre de travail, en vue d'évaluer les contraintes de contact et la température de surface (qui donnent les informations sur l'interaction produit/outil nécessaires à un contrôle du procédé) ainsi que les contraintes thermiques dont dépendent fortement l'usure en fatigue des laminoirs. Outre leur élégance mathématique, plusieurs aspects essentiels sont à retenir de ces solutions. Le niveau de précision est excellent, principalement parce que la méthode de résolution employée est très robuste au fait que les problèmes inverses sont mal posés, également parce qu'aucune limitation sur la qualité du signal d'entrée (fréquence d'acquisition surtout) ne compromet l'utilisation des méthodes pour des signaux très singuliers (nécessitant de très hautes fréquences pour être décrits correctement). Par ailleurs, une bonne robustesse au bruit de mesure a été montrée. Enfin, les temps de calcul extrêmement faibles (de l'ordre de quelques centièmes de seconde) obtenus avec le freeware Scilab, laissent à penser qu'une version du code écrite dans un langage compilé comme C++ permettra à terme une interprétation en temps réel, adaptée à une boucle d'asservissement (automatisation) en vue d'une amélioration du rendement ainsi que de la qualité du procédé, ce qui constituerait une avancée technologique remarquable.

Ces différents points font des méthodes inverses analytiques (adaptées à la métrologie), des outils puissants, qui ne se limitent pas au champ des connaissances théoriques, mais qui ont véritablement leur place dans la recherche industrielle qui privilégie la robustesse, l'efficacité et la rapidité. Le partenariat (contrat sur trois ans) avec ArcelorMittal corrobore assez largement cette conclusion, et les essais sur le laminoir pilote de Maizières-les-Metz présentés au chapitre 6 montrent l'utilisation pratique de ces méthodes analytiques dans la recherche industrielle. En effet, grâce à la connaissance de la température en surface du cylindre de travail (notamment dans l'emprise) en laminage à chaud, des modèles prédictifs de thermique et de fatigue de l'outil ont été modifiés. Ainsi le coefficient de transfert thermique souvent supposé constant dans l'emprise doit en fait dépendre de la pression locale et évolue en "cloche". Cette conclusion conduit à réévaluer les modèles de fatigue thermique, dont les prédictions ont été revues à la baisse. La méthode inverse du chapitre 4 n'a pas encore de validation expérimentale, ceci tient au fait qu'ArcelorMittal a planifié les essais de mesure des déformations dans le cylindre plus tardivement que pour les mesures de température, dont la technologie (insertion du thermocouple) était plus avancée. L'ajout de cette validation expérimentale aux travaux qui ont été exposés, sera nécessaire, dès que les essais auront eu lieu.

Par ailleurs, les chapitres 9 et 10 se posent comme des extensions en trois dimensions des problèmes inverses résolus aux chapitres 4 et 5. Dans la mesure où l'insertion de plusieurs capteurs dans l'axe du cylindre est possible, mais non envisagée dans un avenir proche par l'industriel, ces solutions constituent des extrapolations sur l'avenir. Il ressort de ces deux problèmes, qu'une méthode en trois dimensions apporte un niveau de précision supplémentaire par rapport à plusieurs méthodes en deux dimensions évaluées aux positions supposées des capteurs. L'autre conclusion intéressante est que le temps de calcul n'est pas plus élevé pour le cas 3D que pour plusieurs cas 2D à

différentes positions dans l'axe du cylindre. Le couplage thermoélastique n'a pas été fait dans le cas tridimensionnel. Il suffit d'adapter les raisonnements du chapitre 7 en trois dimensions. Cela ne pose a priori pas de difficultés, mais mérite d'être développé.

11.2. Perspectives

Les solutions présentées dans les pages qui précèdent, portent sur une géométrie d'une remarquable simplicité. Ainsi un lecteur septique conclura que tout corps élastique non cylindrique ne peut pas être appréhendé grâce à des méthodes inverses analytiques. Cependant, les transformations conformes sont des outils très utiles en analyse complexe, qui permettent de résoudre les problèmes d'élasticité sur une géométrie modifiée. Ainsi, partant du cylindre, on définit de très larges classes de géométries collectionnées dans des atlas. Des problèmes variés de contact dans l'industrie peuvent donc être traité par méthode analytique inverse, notamment l'emboutissage, qui est un autre grand domaine de la mise en forme des métaux et dont les problématiques de l'interaction entre un outil en déformation élastique et un produit en régime visco-plastique, rejoignent celles du laminage. Un grand nombre d'études peut être menés en ce sens, et la recherche de solutions inverses analytiques semble autant indiquée pour ces thématiques qu'elle ne l'est pour le laminage.

Par ailleurs, l'élasticité anisotrope fait aussi l'objet de développements analytiques intéressants. Ces derniers n'ont pas été utilisés dans cette thèse car la situation ne s'y prêtait pas. En revanche, des méthodes inverses analytiques anisotropes peuvent être envisagées pour des matériaux composites.

Enfin, la théorie des potentiels que nous avons utilisée, et les mathématiques liées à l'étude des fonctions harmoniques et bi-harmoniques, ainsi que les développements en séries adaptés à la description de points de mesure, ne se limitent en aucune façon aux domaines de l'élasticité et de la thermique. Tout phénomène, dont les grandeurs sont régies par des équations aux dérivées partielles de type elliptique, peut être abordé par la théorie des potentiels. Ainsi, de nombreuses applications à d'autres domaines que celui de la pure mécanique peuvent faire l'objet d'analyses inverses par méthodes analytiques, dans de futurs travaux.

PART C
ANNEXES

ANNEXE A

SOLUTION ANALYTIQUE DIRECTE

Nous cherchons une solution analytique directe T^p (c'est-à-dire avec des conditions imposées à la surface) pour le problème d'un cylindre initialement à température ambiante T_a , auquel on impose un flux défini classiquement comme un coefficient de transfert thermique (HTC) multiplié par la différence de température entre la surface du cylindre et la température environnante notée T^* . Cette dernière est choisie égale à la température ambiante partout sauf sur un secteur angulaire du cylindre (correspondant à l'emprise) $[\pi - \Theta, \pi + \Theta]$ où la valeur est $T_{ext} > T_a$.

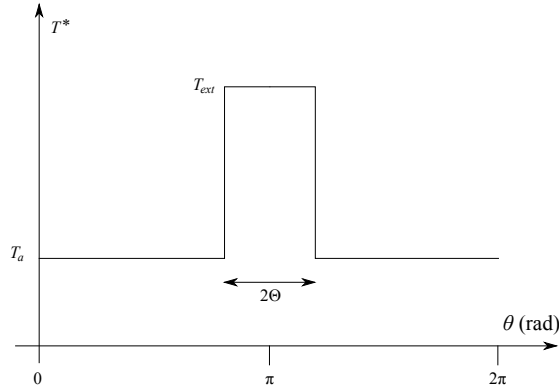


FIGURE A.1 – Température environnante : T^*

La température environnante T^* est 2π -périodique selon θ , nous développons donc en série de Fourier :

$$T^*(\theta) = \sum_{n=-N_3}^{N_3} \delta_n \exp(in\theta) \quad (\text{A.1})$$

où l'ordre de troncature N_3 sera fixé à 100. Nous avons aisément l'expression analytique des coefficients :

$$\begin{cases} \delta_0 = T_a + \frac{(T_{ext} - T_a)\Theta}{\pi} \\ \delta_n = \frac{T_{ext} - T_a}{2\pi n} [\exp(-in(\pi - \Theta)) - \exp(-in(\pi + \Theta))] \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

La solution est recherchée sous forme d'une série de solutions du type de (3.24) (démontré au chapitre 3) :

$$T^p(r, \theta, t) = \sum_{n=-N_3}^{N_3} \sum_{q=1}^{N_4} a_{n,q} J_n \left(\sqrt{\frac{1}{D\tau_{n,q}} - \frac{i\omega n}{D}} r \right) \exp\left(\frac{-t}{\tau_{n,q}}\right) \exp(in\theta) + \sum_{n=-N}^N b_n J_n(\zeta_n r) \exp(in\theta) \quad (\text{A.3})$$

où $\zeta_n = \sqrt{-i\omega n/D}$ et $a_{n,q}$ et b_n sont des nombres complexes et N_4 est un entier.

La condition aux limites s'écrit :

$$\lambda \frac{\partial T^p}{\partial r}(R_s, \theta, t) = \text{HTC} \times (T^p(R_s, \theta, t) - T^*) \quad (\text{A.4})$$

Il est commode d'introduire la quantité suivante :

$$y_{n,q} = R_s \sqrt{\frac{1}{D\tau_{n,q}} - \frac{i\omega n}{D}} \quad (\text{A.5})$$

La condition aux limites (A.4) donne :

$$\frac{\lambda y_{n,q}}{R_s} J'_n(y_{n,q}) + \text{HTC} \times J_n(y_{n,q}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Les coefficients $y_{n,q}$ sont calculés numériquement en prenant les racines positives ordonnées de la fonction auxiliaire suivante :

$$h_n(y) = \lambda \frac{y}{R_s} J'_n(y) + \text{HTC} \times J_n(y) \quad (\text{A.7})$$

La figure A.2 présente un exemple.

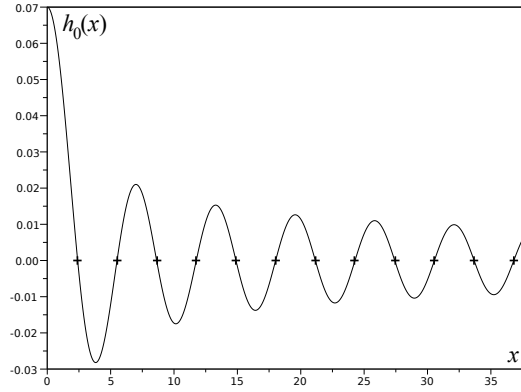


FIGURE A.2 – Racines successives de $h_0(x)$

Les conditions aux limites (A.4) permettent également d'identifier les coefficients des termes indépendants du temps, nous obtenons facilement :

$$\begin{cases} b_0 = \delta_0 \\ b_n = \frac{\text{HTC} \times \delta_n}{\lambda \zeta_n J'_n(\zeta_n R_s) + \text{HTC} \times J_n(\zeta_n R_s)} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

La condition initiale du problème s'écrit :

$$T^p(r, \theta, 0) = T_a \quad (\text{A.9})$$

Cette dernière condition (A.9) permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^{N_4} a_{0,q} J_0\left(\frac{y_{0,q} r}{R_s}\right) = T_a - b_0 = u_0^*(r) \\ \sum_{q=1}^{N_4} a_{n,q} J_n\left(\frac{y_{n,q} r}{R_s}\right) = -b_n J_n(\zeta_n r) = u_n^*(r) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

En utilisant les intégrales classiques sur les fonctions de Bessel que nous avons reportées au chapitre 2 l'expression analytique de $a_{n,q}$ devient simplement :

$$\begin{cases} a_{0,q} = \frac{2y_{0,q}(T_a - \delta_0)J_1(y_{0,q})}{\left(y_{0,q}^2 + \frac{R_s^2 \text{HTC}^2}{\lambda^2}\right) J_0^2(y_{0,q})} \\ a_{n,q} = \frac{2y_{n,q}^2 b_n}{\left(y_{n,q}^2 - n^2 + \frac{R_s^2 \text{HTC}^2}{\lambda^2}\right) J_n^2(y_{n,q})} \frac{\zeta_n R_s J_{n+1}(\zeta_n R_s) J_n(y_{n,q}) - y_{n,q} J_{n+1}(y_{n,q}) J_n(\zeta_n R_s)}{y_{n,q}^2 - \zeta_n^2 R_s^2} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

ANNEXE B

PROBLÈME COUPLÉ THERMOÉLASTIQUE

B.1. Preuve de la solution particulière de l'équation de Navier

Nous cherchons une solution particulière de l'équation de Navier définie au chapitre 7 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \left(U_n''(r) + \frac{U_n'(r)}{r} - \frac{U_n(r)}{r^2} \right) - \mu n^2 \frac{U_n(r)}{r^2} \\ + (\lambda + \mu) i n \frac{V_n'(r)}{r} - (\lambda + 3\mu) i n \frac{V_n(r)}{r^2} = (\lambda + 2\mu) L_n J_n'(\zeta_n r) \\ \\ \mu \left(V_n''(r) + \frac{V_n'(r)}{r} - \frac{V_n(r)}{r^2} \right) - (\lambda + 2\mu) n^2 \frac{V_n(r)}{r^2} \\ + (\lambda + \mu) i n \frac{U_n'(r)}{r} + (\lambda + 3\mu) i n \frac{U_n(r)}{r^2} = i n (\lambda + 2\mu) L_n \frac{J_n(\zeta_n r)}{\zeta_n r} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \left(u_{n,p}''(r) + \frac{u_{n,p}'(r)}{r} - \frac{u_{n,p}(r)}{r^2} \right) - \mu n^2 \frac{u_{n,p}(r)}{r^2} \\ + (\lambda + \mu) i n \frac{v_{n,p}'(r)}{r} - (\lambda + 3\mu) i n \frac{v_{n,p}(r)}{r^2} = (\lambda + 2\mu) l_{n,p} J_n' \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right) \\ \\ \mu \left(v_{n,p}''(r) + \frac{v_{n,p}'(r)}{r} - \frac{v_{n,p}(r)}{r^2} \right) - (\lambda + 2\mu) n^2 \frac{v_{n,p}(r)}{r^2} \\ + (\lambda + \mu) i n \frac{u_{n,p}'(r)}{r} + (\lambda + 3\mu) i n \frac{u_{n,p}(r)}{r^2} = i n (\lambda + 2\mu) l_{n,p} \frac{J_n \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right)}{x_{n,p} \frac{r}{r_m}} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (B.1)$$

Nous démontrons que le système de fonctions suivant est bien solution.

$$\begin{array}{l} \forall n \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} U_n(r) = -\frac{L_n}{\zeta_n^2} J_n'(\zeta_n r) \\ V_n(r) = -i n \frac{L_n}{\zeta_n^2} \frac{J_n(\zeta_n r)}{\zeta_n r} \end{array} \right. \\ \\ \forall n \geq 0 \\ \forall p \geq 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{n,p}(r) = -\frac{l_{n,p}}{(x_{n,p}/r_m)^2} J_n' \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right) \\ v_{n,p}(r) = -i n \frac{l_{n,p}}{(x_{n,p}/r_m)^2} \frac{J_n \left(x_{n,p} \frac{r}{r_m} \right)}{x_{n,p} r/r_m} \end{array} \right. \end{array} \quad (B.2)$$

Il convient de remarquer que U_n et $u_{n,p}$ ainsi que V_n et $v_{n,p}$ jouent des rôles parfaitement analogues.

Le terme de gauche dans l'équation (B.1) implique la quantité suivante :

$$g_1(r) = (\lambda + 2\mu) \left(P_n''(r) + \frac{P_n'(r)}{r} - \frac{P_n(r)}{r^2} \right) - \mu n^2 \frac{P_n(r)}{r^2} \quad (B.3)$$

En utilisant (B.2) et en notant $x = \zeta_n r$ nous obtenons :

$$g_1(r) = -(\lambda + 2\mu)L_n \left(J_n''(x) + \frac{J_n''(x)}{x} - \frac{J_n'(x)}{x^2} \right) + \mu n^2 L_n \frac{J_n'(x)}{x^2}$$

L'équation différentielle vérifiée par la fonction de Bessel de première espèce (établie au chapitre 2) est :

$$J_n''(x) + \frac{J_n'(x)}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n(x) = 0 \quad (\text{B.4})$$

En différenciant cette dernière relation (B.4), nous obtenons :

$$J_n'''(x) + \frac{J_n''(x)}{x} - \frac{J_n'(x)}{x^2} = - \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n'(x) - \frac{2n^2}{x^3} J_n(x)$$

D'où :

$$g_1(r) = -L_n(\lambda + 2\mu) \left(\left(\frac{n^2}{x^2} - 1 \right) J_n'(x) - \frac{2n^2}{x^3} J_n(x) \right) + L_n \mu n^2 \frac{J_n'(x)}{x^2}$$

Et finalement :

$$g_1(r) = -L_n \left((\lambda + \mu) \frac{n^2}{x^2} - (\lambda + 2\mu) \right) J_n'(x) + 2L_n(\lambda + 2\mu) \frac{n^2}{x^3} J_n(x) \quad (\text{B.5})$$

Le terme de gauche de (B.1) implique la quantité suivante :

$$g_2(r) = (\lambda + \mu)in \frac{Q_n'(r)}{r} - (\lambda + 3\mu)in \frac{Q_n(r)}{r^2}$$

En utilisant (B.2), nous obtenons :

$$g_2(r) = (\lambda + \mu)n^2 L_n \left(\frac{J_n'(x)}{x^2} - \frac{J_n(x)}{x^3} \right) - (\lambda + 3\mu)n^2 L_n \frac{J_n(x)}{x^3}$$

Et finalement :

$$g_2(r) = L_n(\lambda + \mu) \frac{n^2}{x^2} J_n'(x) - 2L_n(\lambda + 2\mu) \frac{n^2}{x^3} J_n(x) \quad (\text{B.6})$$

En combinant (B.5) et (B.6), nous obtenons :

$$g_1(r) + g_2(r) = L_n(\lambda + 2\mu)J_n'(x) \quad (\text{B.7})$$

Donc la première équation de (B.1) est vérifiée.

Le terme de gauche de (B.1) implique également la quantité suivante :

$$g_3(r) = \mu \left(Y_n''(r) + \frac{Q_n'(r)}{r} - \frac{Q_n(r)}{r^2} \right) - (\lambda + 2\mu)n^2 \frac{Q_n(r)}{r^2}$$

En utilisant (B.2), nous obtenons :

$$g_3(r) = -inL_n \left(\mu \left(\frac{J_n''(x)}{x} - 2\frac{J_n'(x)}{x^2} + 2\frac{J_n(x)}{x^3} + \frac{J_n'(x)}{x^2} - \frac{J_n(x)}{x^3} - \frac{J_n(x)}{x^3} \right) - (\lambda + 2\mu)n^2 \frac{J_n(x)}{x^3} \right)$$

D'où :

$$g_3(r) = -inL_n \left(\mu \left(\frac{J_n''(x)}{x} - \frac{J_n'(x)}{x^2} \right) - (\lambda + 2\mu)n^2 \frac{J_n(x)}{x^3} \right)$$

En utilisant directement (B.4) nous avons :

$$g_3(r) = -inL_n \left(\mu \left(-2\frac{J_n'(x)}{x^2} + \left(\frac{n^2}{x^3} - \frac{1}{x} \right) J_n(x) \right) - (\lambda + 2\mu)n^2 \frac{J_n(x)}{x^3} \right)$$

Et :

$$g_3(r) = inL_n \left(2\mu \frac{J'_n(x)}{x^2} + \left((\lambda + \mu) \frac{n^2}{x^3} + \frac{\mu}{x} \right) J_n(x) \right) \quad (\text{B.8})$$

Le terme de gauche de (B.1) implique la quantité suivante :

$$g_4(r) = (\lambda + \mu) in \frac{P'_n(r)}{r} + (\lambda + 3\mu) in \frac{P_n(r)}{r^2}$$

En utilisant (B.2), nous avons :

$$g_4(r) = -inL_n \left((\lambda + \mu) \frac{J''_n(x)}{x} + (\lambda + 3\mu) \frac{J'_n(x)}{x^2} \right)$$

En utilisant directement (B.4), nous obtenons :

$$g_4(r) = -inL_n \left((\lambda + \mu) \left(-\frac{J'_n(x)}{x^2} + \left(\frac{n^2}{x^3} - \frac{1}{x} \right) J_n(x) \right) + (\lambda + 3\mu) \frac{J'_n(x)}{x^2} \right)$$

Et :

$$g_4(r) = inL_n \left(-2\mu \frac{J'_n(x)}{x^2} - (\lambda + \mu) \left(\frac{n^2}{x^3} - \frac{1}{x} \right) J_n(x) \right) \quad (\text{B.9})$$

En combinant (B.8) et (B.9), nous avons :

$$g_3(r) + g_4(r) = inL_n (\lambda + 2\mu) \frac{J_n(x)}{x} \quad (\text{B.10})$$

Ainsi la deuxième équation de (B.1) est vérifiée.

B.2. Champ de température

La simulation numérique par différence finies produit un champ de température, que nous exprimons de manière analytique à travers ses coefficients de Fourier. Le premier terme est :

$$T_0 = 366.3 \quad (\text{B.11})$$

Les termes suivants sont listés dans le tableau :

TABLE B.1 – T_n

n	T_n	n	T_n	n	T_n	n	T_n
1	-1.92D+01+i 2.05D+01	51	4.03D-03+i 3.48D-02	101	-1.84D-04+i 2.35D-03	151	-3.00D-07+i 3.41D-05
2	9.70D+00+i -1.44D+01	52	-1.22D-03+i 1.51D-02	102	1.59D-04+i 2.10D-03	152	-3.00D-07+i 3.16D-05
3	-2.76D+00+i 1.09D+01	53	-2.68D-03+i 3.25D-02	103	-1.49D-04+i 1.96D-03	153	-4.16D-09+i 2.69D-05
4	2.85D+00+i -5.46D+00	54	5.56D-03+i 1.47D-02	104	1.09D-04+i 1.96D-03	154	-5.00D-07+i 2.47D-05
5	-2.85D+00+i 4.36D+00	55	-7.51D-03+i 2.89D-02	105	-7.59D-05+i 1.66D-03	155	3.00D-07+i 2.12D-05
6	2.57D+00+i -2.51D+00	56	8.52D-03+i 1.63D-02	106	3.84D-05+i 1.79D-03	156	-3.00D-07+i 1.89D-05
7	-2.67D+00+i 2.63D+00	57	-9.28D-03+i 2.31D-02	107	-2.43D-05+i 1.42D-03	157	1.00D-07+i 1.66D-05
8	2.07D+00+i -1.59D+00	58	8.90D-03+i 1.83D-02	108	-1.56D-05+i 1.59D-03	158	-5.00D-07+i 1.42D-05
9	-1.40D+00+i 1.58D+00	59	-8.02D-03+i 1.72D-02	109	5.53D-05+i 1.27D-03	159	1.00D-07+i 1.28D-05
10	1.18D+00+i -4.43D-01	60	7.33D-03+i 2.01D-02	110	-6.74D-05+i 1.36D-03	160	-2.00D-07+i 1.06D-05
11	-8.89D-01+i 4.70D-01	61	-5.47D-03+i 1.35D-02	111	9.36D-05+i 1.14D-03	161	-5.84D-08+i 9.70D-06
12	7.84D-01+i 2.31D-01	62	4.12D-03+i 2.03D-02	112	-9.22D-05+i 1.16D-03	162	2.61D-08+i 8.00D-06
13	-6.40D-01+i 4.21D-03	63	-2.54D-03+i 1.12D-02	113	7.73D-05+i 1.03D-03	163	-1.00D-07+i 7.20D-06
14	4.80D-01+i 3.21D-01	64	9.74D-04+i 1.86D-02	114	-6.81D-05+i 9.83D-04	164	1.97D-08+i 5.90D-06
15	-1.91D-01+i -8.82D-02	65	2.79D-04+i 1.06D-02	115	3.82D-05+i 9.28D-04	165	-9.91D-08+i 5.10D-06
16	5.59D-02+i 3.80D-01	66	-1.19D-03+i 1.61D-02	116	-3.58D-05+i 8.21D-04	166	1.00D-07+i 4.30D-06
17	1.03D-01+i -1.90D-01	67	2.00D-03+i 1.14D-02	117	2.71D-05+i 8.36D-04	167	-7.95D-08+i 3.70D-06
18	-1.71D-01+i 4.18D-01	68	-2.48D-03+i 1.32D-02	118	-1.35D-05+i 7.05D-04	168	5.29D-08+i 3.10D-06
19	1.87D-01+i -1.73D-01	69	2.47D-03+i 1.21D-02	119	4.00D-06+i 7.15D-04	169	-7.04D-08+i 2.60D-06
20	-2.16D-01+i 2.96D-01	70	-2.38D-03+i 1.04D-02	120	9.70D-06+i 6.13D-04	170	3.67D-09+i 2.20D-06
21	2.49D-01+i -3.44D-02	71	2.03D-03+i 1.24D-02	121	-2.47D-05+i 6.08D-04	171	-1.90D-08+i 1.80D-06
22	-2.63D-01+i 1.53D-01	72	-1.40D-03+i 8.20D-03	122	2.45D-05+i 5.38D-04	172	5.27D-09+i 1.50D-06
23	2.72D-01+i 5.34D-02	73	1.03D-03+i 1.23D-02	123	-2.86D-05+i 5.13D-04	173	8.01D-09+i 1.20D-06
24	-2.55D-01+i 8.43D-02	74	-4.27D-04+i 6.90D-03	124	1.95D-05+i 4.71D-04	174	-4.97D-09+i 1.00D-06
25	2.08D-01+i 9.11D-02	75	-3.67D-05+i 1.13D-02	125	-2.20D-05+i 4.25D-04	175	4.88D-09+i 8.00D-07
26	-1.66D-01+i 3.07D-02	76	4.67D-04+i 6.42D-03	126	1.49D-05+i 4.17D-04	176	-1.64D-08+i 7.00D-07
27	1.22D-01+i 1.33D-01	77	-8.59D-04+i 9.91D-03	127	-1.06D-05+i 3.48D-04	177	4.29D-09+i 5.00D-07
28	-8.95D-02+i -1.52D-02	78	1.19D-03+i 6.44D-03	128	7.60D-06+i 3.57D-04	178	-1.50D-08+i 4.00D-07
29	6.20D-02+i 1.42D-01	79	-1.29D-03+i 8.38D-03	129	-4.30D-06+i 2.97D-04	179	-2.92D-09+i 3.00D-07
30	-4.19D-02+i -9.93D-03	80	1.21D-03+i 6.46D-03	130	1.90D-06+i 3.03D-04	180	-2.20D-09+i 2.00D-07
31	1.19D-02+i 1.10D-01	81	-1.14D-03+i 6.91D-03	131	6.80D-06+i 2.50D-04	181	1.09D-09+i 2.00D-07
32	6.29D-03+i 2.21D-02	82	8.84D-04+i 6.51D-03	132	-5.50D-06+i 2.52D-04	182	-4.57D-09+i 1.00D-07
33	-2.92D-02+i 7.31D-02	83	-6.24D-04+i 5.66D-03	133	6.90D-06+i 2.15D-04	183	-1.11D-09+i 1.00D-07
34	3.53D-02+i 4.31D-02	84	4.10D-04+i 6.28D-03	134	-8.20D-06+i 2.03D-04	184	2.60D-10+i 7.61D-08
35	-3.99D-02+i 4.47D-02	85	-2.08D-04+i 4.84D-03	135	5.40D-06+i 1.81D-04	185	-1.40D-10+i 5.61D-08
36	3.32D-02+i 6.25D-02	86	-3.77D-05+i 5.82D-03	136	-4.90D-06+i 1.66D-04	186	6.48D-11+i 3.84D-08
37	-2.99D-02+i 1.83D-02	87	2.35D-04+i 4.39D-03	137	2.30D-06+i 1.54D-04	187	-6.59D-10+i 2.74D-08
38	2.01D-02+i 8.18D-02	88	-4.16D-04+i 5.09D-03	138	-1.50D-06+i 1.35D-04	188	-4.24D-11+i 1.81D-08
39	-1.82D-02+i -1.74D-05	89	5.60D-04+i 4.18D-03	139	-4.00D-07+i 1.32D-04	189	-8.39D-11+i 1.19D-08
40	8.82D-03+i 8.38D-02	90	-6.12D-04+i 4.36D-03	140	-6.00D-07+i 1.11D-04	190	-3.47D-11+i 7.63D-09
41	-4.06D-03+i -1.77D-03	91	5.89D-04+i 3.99D-03	141	-1.50D-06+i 1.07D-04	191	-2.98D-11+i 4.50D-09
42	-4.54D-03+i 7.31D-02	92	-5.28D-04+i 3.68D-03	142	1.20D-06+i 9.23D-05	192	-1.24D-11+i 2.64D-09
43	1.06D-02+i 6.48D-03	93	4.30D-04+i 3.81D-03	143	-2.30D-06+i 8.69D-05	193	-7.06D-12+i 1.39D-09
44	-1.61D-02+i 5.99D-02	94	-3.37D-04+i 3.09D-03	144	3.00D-06+i 7.52D-05	194	-5.10D-12+i 7.04D-10
45	1.71D-02+i 1.43D-02	95	2.48D-04+i 3.56D-03	145	-2.40D-06+i 6.91D-05	195	1.80D-12+i 3.12D-10
46	-1.77D-02+i 4.46D-02	96	-1.53D-04+i 2.66D-03	146	2.60D-06+i 6.15D-05	196	-1.70D-12+i 1.24D-10
47	1.60D-02+i 2.34D-02	97	6.77D-05+i 3.17D-03	147	-1.70D-06+i 5.40D-05	197	8.93D-14+i 3.91D-11
48	-1.33D-02+i 2.98D-02	98	1.11D-05+i 2.43D-03	148	9.00D-07+i 5.02D-05	198	-3.59D-14+i 9.09D-12
49	1.09D-02+i 3.22D-02	99	-1.07D-04+i 2.75D-03	149	-1.30D-06+i 4.32D-05	199	2.09D-14+i 1.15D-12
50	-8.12D-03+i 1.99D-02	100	1.28D-04+i 2.24D-03	150	-9.70D-08+i 4.04D-05	200	-9.70D-16+i 3.49D-14

ANNEXE C

SOLUTION ANALYTIQUE DIRECTE EN 3D

Nous cherchons une solution analytique directe T^p (c'est-à-dire avec des conditions imposées à la surface) pour le problème d'un cylindre initialement à température ambiante T_a , auquel on impose un flux défini classiquement comme un coefficient de transfert thermique (HTC) multiplié par la différence de température entre la surface du cylindre et la température environnante notée T^* . Cette dernière est choisie égale à la température ambiante partout sauf sur un secteur du cylindre $(\theta, z) \in [\pi - \Theta, \pi + \Theta] \times [-L + Z, L - Z]$ où la température est une rampe comme la figure C.1 le montre.

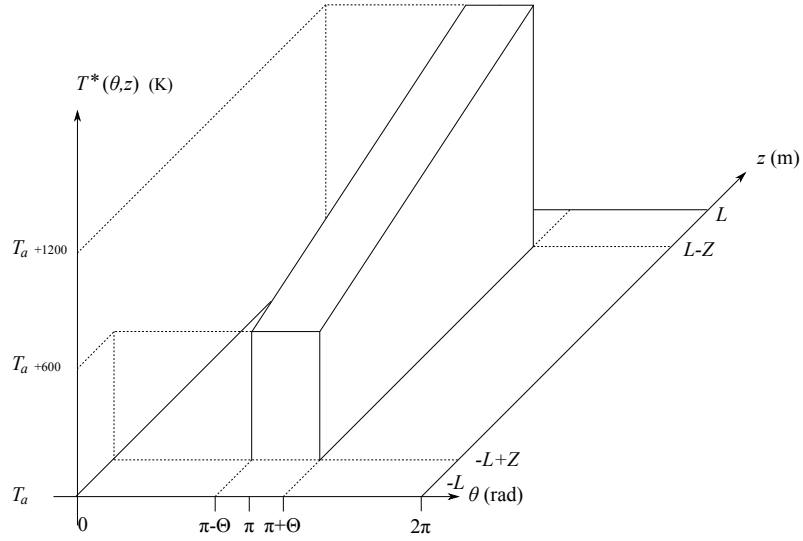


FIGURE C.1 – Surrounding temperature : T^*

La température environnante T^* est 2π -périodique selon θ , nous développons donc en série de Fourier :

$$T^*(\theta, z) = \sum_{n=-N_2}^{N_2} \sum_{p=0}^{P_2} \left[a_{n,p}^* \cos\left(\frac{\pi p z}{L}\right) + b_{n,p}^* \sin\left(\frac{\pi(2p+1)z}{2L}\right) \right] \exp(in\theta) \quad (\text{C.1})$$

Les coefficients $a_{n,p}^*$ et $b_{n,p}^*$ sont facilement exprimés analytiquement :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \forall p \geq 1 \quad & \begin{cases} a_{n,p}^* = \frac{1}{2L\pi} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} T^*(\theta, z) \exp(-in\theta) \cos\left(\frac{p\pi z}{L}\right) d\theta dz \\ b_{n,p}^* = \frac{1}{2L\pi} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} T^*(\theta, z) \exp(-in\theta) \sin\left(\frac{(2p+1)\pi z}{2L}\right) d\theta dz \end{cases} \\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad & \begin{cases} a_{n,0}^* = \frac{1}{4L\pi} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} T^*(\theta, z) \exp(-in\theta) d\theta dz \\ b_{n,0}^* = \frac{1}{2L\pi} \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} T^*(\theta, z) \exp(-in\theta) \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right) d\theta dz \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Nous prenons les ordre de troncature suivants : $N_2 = 20$ et $P_2 = 14$. Le profil réel (correspondant à ces valeurs de troncature) de T^* est donné figure C.2.

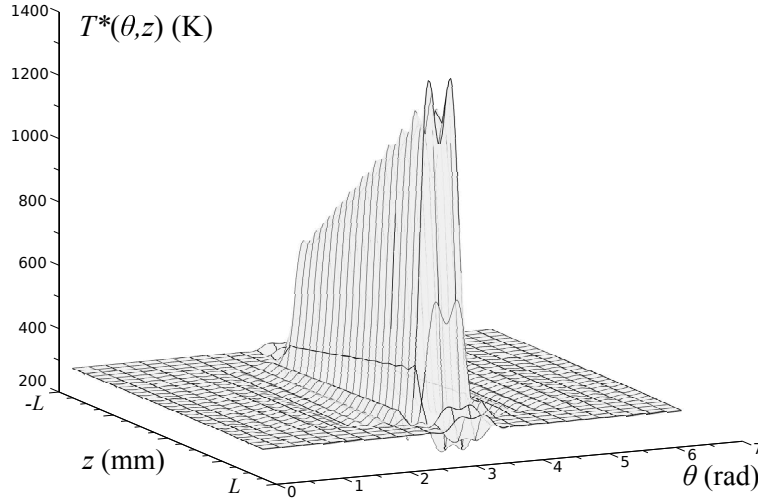


FIGURE C.2 – Température environnante : T^*

La solution est recherchée sous forme d'une série du type de (8.31) (démontrée au chapitre 8) :

$$\begin{aligned} T^p(r, \theta, z, t) = & \sum_{n=-N_2}^{N_2} \sum_{p=0}^{P_2} \left[a_{n,p} J_n(\zeta_{n,p} r) \cos\left(\frac{\pi p z}{L}\right) + b_{n,p} J_n(\chi_{n,p} r) \sin\left(\frac{\pi(2p+1)z}{2L}\right) \right] \exp(in\theta) \\ & + \sum_{n=-N_2}^{N_2} \sum_{p=0}^{P_2} \sum_{q=1}^{Q_2} c_{n,p,q} J_n \left(r \sqrt{\frac{1}{D\tau_{n,p,q}^*} - \frac{i\omega n}{D} - \left(\frac{\pi p}{L}\right)^2} \right) \\ & \quad \times \exp\left(\frac{-t}{\tau_{n,p,q}^*}\right) \exp(in\theta) \cos\left(\frac{\pi p z}{L}\right) \\ & + \sum_{n=-N_2}^{N_2} \sum_{p=0}^{P_2} \sum_{q=1}^{Q_2} d_{n,p,q} J_n \left(r \sqrt{\frac{1}{Dv_{n,p,q}^*} - \frac{i\omega n}{D} - \left(\frac{\pi(2p+1)}{2L}\right)^2} \right) \\ & \quad \times \exp\left(\frac{-t}{v_{n,p,q}^*}\right) \exp(in\theta) \sin\left(\frac{\pi(2p+1)z}{2L}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où $\zeta_{n,p} = \sqrt{-(p\pi/L)^2 - i\omega n/D}$ et $\chi_{n,p} = \sqrt{-((2p+1)\pi/(2L))^2 - i\omega n/D}$ et $a_{n,p}$, $b_{n,p}$, $c_{n,p,q}$ et $d_{n,p,q}$ sont des nombres complexes et N_2 , P_2 et Q_2 sont des entiers.

La condition aux limites s'écrit :

$$\lambda \frac{\partial T^p}{\partial r}(R_s, \theta, z, t) = \text{HTC} \times (T^*(\theta, z) - T^p(R_s, \theta, z, t)) \quad (\text{C.4})$$

Il est commode d'introduire la quantité suivante :

$$y_{n,q} = R_s \sqrt{\frac{1}{D\tau_{n,p,q}^*} - \frac{i\omega n}{D} - \left(\frac{\pi p}{L}\right)^2} = R_s \sqrt{\frac{1}{Dv_{n,p,q}^*} - \frac{i\omega n}{D} - \left(\frac{\pi(2p+1)}{2L}\right)^2} \quad (\text{C.5})$$

La notation $y_{n,q}$ est abusive car la définition implique clairement une dépendance selon l'indice de sommation p . Cependant, la condition aux limites (C.4) donne :

$$\frac{\lambda y_{n,q}}{R_s} J'_n(y_{n,q}) + \text{HTC} \times J_n(y_{n,q}) = 0 \quad (\text{C.6})$$

Ainsi les coefficients $y_{n,q}$ ne dépendent pas a posteriori de p et sont calculés numériquement en prenant les racines positives ordonnées de la fonction auxiliaire suivante :

$$y \mapsto h_n(y) = \lambda \frac{y}{R_s} J'_n(y) + \text{HTC} \times J_n(y) \quad (\text{C.7})$$

La figure A.2 présente un exemple. Nous avons :

$$\begin{cases} \tau_{n,p,q}^* = \frac{1}{D} \left(\left(\frac{y_{n,q}}{R_s} \right)^2 + \frac{i\omega n}{D} + \left(\frac{\pi p}{L} \right)^2 \right)^{-1} \\ v_{n,p,q}^* = \frac{1}{D} \left(\left(\frac{y_{n,q}}{R_s} \right)^2 + \frac{i\omega n}{D} + \left(\frac{\pi(2p+1)}{2L} \right)^2 \right)^{-1} \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Les conditions aux limites (C.4) permettent également d'identifier les coefficients des termes indépendants du temps, nous obtenons facilement :

$$\begin{cases} a_{0,0} = a_{0,0}^* \\ a_{n,p} = \frac{\text{HTC} \times a_{n,p}^*}{\lambda \zeta_{n,p} J'_n(\zeta_{n,p} R_s) + \text{HTC} \times J_n(\zeta_{n,p} R_s)} \\ b_{0,0} = \frac{\text{HTC} \times b_{0,0}^*}{\lambda \chi_{0,0} J'_0(\chi_{0,0} R_s) + \text{HTC} \times J_0(\chi_{0,0} R_s)} \\ b_{n,p} = \frac{\text{HTC} \times b_{n,p}^*}{\lambda \chi_{n,p} J'_n(\chi_{n,p} R_s) + \text{HTC} \times J_n(\chi_{n,p} R_s)} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

La condition initiale du problème s'écrit :

$$T^p(r, \theta, z, 0) = T_a \quad (\text{C.10})$$

Cette dernière condition (C.10) permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^{Q_2} c_{0,0,q} J_0 \left(\frac{y_{0,q} r}{R_s} \right) = T_a - a_{0,0} = u_{0,0}^*(r) \\ \sum_{q=1}^{Q_2} c_{n,p,q} J_n \left(\frac{y_{n,q} r}{R_s} \right) = -a_{n,p} J_n(\zeta_{n,p} r) = u_{n,p}^*(r) \\ \sum_{q=1}^{Q_2} d_{0,0,q} J_0 \left(\frac{y_{0,q} r}{R_s} \right) = -b_{0,0} = v_{0,0}^*(r) \\ \sum_{q=1}^{Q_2} d_{n,p,q} J_n \left(\frac{y_{n,q} r}{R_s} \right) = -b_{n,p} J_n(\chi_{n,p} r) = v_{n,p}^*(r) \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Ce dernier système se résout grâce aux séries de Dini introduites au chapitre 2. Le résultat est utilisé par exemple par Sneddon (1966, p.40) et démontré par Watson (1944, p.596). Nous avons :

$$\begin{cases} c_{n,p,q} = \frac{2y_{n,q}^2}{\left(y_{n,q}^2 - n^2 + \frac{R_s^2 \text{HTC}^2}{\lambda^2}\right) R_s^2 J_n^2(y_{n,q})} \int_0^{R_s} \rho u_{n,p}^*(\rho) J_n\left(y_{n,q} \frac{\rho}{R_s}\right) d\rho \\ d_{n,p,q} = \frac{2y_{n,q}^2}{\left(y_{n,q}^2 - n^2 + \frac{R_s^2 \text{HTC}^2}{\lambda^2}\right) R_s^2 J_n^2(y_{n,q})} \int_0^{R_s} \rho v_{n,p}^*(\rho) J_n\left(y_{n,q} \frac{\rho}{R_s}\right) d\rho \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

En utilisant les intégrales classiques sur les fonctions de Bessel que nous avons reportées au chapitre 2, les expressions analytiques de $c_{n,p,q}$ et $d_{n,p,q}$ deviennent simplement :

$$\begin{cases} c_{0,0,q} = \frac{2y_{0,q}(T_a - a_{0,0})J_1(y_{0,q})}{\left(y_{0,q}^2 + \frac{R_s^2 \text{HTC}^2}{\lambda^2}\right) J_0^2(y_{0,q})} \\ c_{n,p,q} = \frac{2y_{n,q}^2 a_{n,p}}{\left(y_{n,q}^2 - n^2 + \frac{R_s^2 \text{HTC}^2}{\lambda^2}\right) J_n^2(y_{n,q})} \frac{\zeta_{n,p} R_s J_{n+1}(\zeta_{n,p} R_s) J_n(y_{n,q}) - y_{n,q} J_{n+1}(y_{n,q}) J_n(\zeta_{n,p} R_s)}{y_{n,q}^2 - \zeta_{n,p}^2 R_s^2} \\ d_{0,0,q} = \frac{2y_{0,q}^2 b_{0,0}}{\left(y_{0,q}^2 + \frac{R_s^2 \text{HTC}^2}{\lambda^2}\right) J_0^2(y_{0,q})} \frac{\chi_{0,0} R_s J_1(\chi_{0,0} R_s) J_0(y_{0,q}) - y_{0,q} J_1(y_{0,q}) J_0(\chi_{0,0} R_s)}{y_{0,q}^2 - \chi_{0,0}^2 R_s^2} \\ d_{n,p,q} = \frac{2y_{n,q}^2 b_{n,p}}{\left(y_{n,q}^2 - n^2 + \frac{R_s^2 \text{HTC}^2}{\lambda^2}\right) J_n^2(y_{n,q})} \frac{\chi_{n,p} R_s J_{n+1}(\chi_{n,p} R_s) J_n(y_{n,q}) - y_{n,q} J_{n+1}(y_{n,q}) J_n(\chi_{n,p} R_s)}{y_{n,q}^2 - \chi_{n,p}^2 R_s^2} \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

Nous avons donc déterminé de manière complètement exacte la solution du problème direct de thermique. Nous pouvons noter que les flux que nous avons imposés aux extrémités du cylindre sont nuls du fait que l'on utilise des sommes finies dont le flux axial en $z = \pm L$ est nul pour chaque terme.

BIBLIOGRAPHIE

- Abdelkhalek, S., Montmitonnet, P., Legrand, N., Buessler, P., 2011. Coupled approach for flatness prediction in cold rolling of thin strip. *International Journal of Mechanical Sciences* 53, 661–675.
- Abramowitz, M., Stegun, I., 1964. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York.
- Acton, F., 1990. *Numerical methods that work*. The mathematical Association of America.
- Alifanov, O., 1994. Inverse heat transfer problems. Springer-Verlag, Berlin. pp. 200–203.
- Andersen, C., Ravn, B., Wanheim, T., 2001. Development of a commercial transducer for measuring pressure and friction on a model die surface. *JMPT* 115, 205–211.
- Andrews, G., Askey, R., Roy, R., 1999. *Special Functions*. volume 71 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Barber, J., 2003. *Elasticity*. volume 107 of *Solid Mechanics and Its Applications*. Springer, Berlin.
- Beck, J., Blackwell, B., St Clair, C., 1985. *Inverse heat conduction, ill-posed problems*. John Wiley, New York.
- Bezerra, L., Saigal, S., 1995. Inverse boundary traction reconstruction with the bem. *International Journal of Solids Structures* 32, 1417–1431.
- Blum, J., Marquardt, W., 1997. An optimal solution to inverse heat conduction problems based on frequency domain interpretation and observers. *Numerical Heat Transfer* 32, 453–478.
- Bock, S., Gürlebeck, K., 2009. On a spatial generalization of the kolosov-muskhelishvili formulae. *Mathematical Methods in the Applied. Sciences* 32, 223–240.
- Boussinesq, J., 1885. *Application des potentiels a l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier-Vallars, Paris. In french.
- Bui, H., 2006. *Fracture Mechanics, Inverse Problems and Solutions*. volume 139 of *Solid Mechanics and Its Applications*. Springer, Berlin.
- CEA, 2011. Cast3m. Commissariat A l'Energie Atomique, [http ://www-cast3m.cea.fr/](http://www-cast3m.cea.fr/).
- Chau, K., 1998. Analytic solutions for diametral point load strength tests. *Journal of Engineering Mechanics* 124, 857 – 883.
- Chau, K., Wei, X., 2000. Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. part 1 analytic solution. *International Journal of Solids and Structures* 37, 5707 – 5732.
- Chen, W.L., Yang, Y.C., 2010. Inverse problem of estimating the heat flux at the roller/workpiece interface during a rolling process. *Applied Thermal Engineering* 30, 1247–1254.
- Corral, R., Colas, R., Perez, A., 2004. Modeling the thermal and thermoelastic responses of work rolls used for hot rolling steel strip. *Journal of Materials Processing Technology* 153, 886–893.

- Ferdinand, P., Magne, S., Laffont, G., Dewynter, V., Maurin, L., Prudhomme, C., Roussel, N., Giuseffi, M., Maguis, S., 2009. Optical Fiber Sensors from Laboratory to Field Trials : Applications and Trends at CEA LIST. *Fiber And Integrated Optics* 28, 81–107.
- Gradshteyn, I., Ryzhik, I., 1992. *Tables of integrals, Series and Products*. Academic Press, New York.
- Guo, R., 1998. Two-dimensional transient thermal behavior of work rolls in rolling process. *Journal of Manufacturing Science and Engineering-Transactions of the ASME* 120, 28–33.
- Hacquin, A., 1996. *Modelisation thermo-mecanique tridimensionnelle du laminage : couplage bande-cylindres [3D thermomechanical modelling of rolling processes : coupling strip and rolls]*. Ph.D. thesis. Cemef Ecole des Mines de Paris. In French.
- Hello, P., Vinet, J., 1990. Analytical models of thermal aberrations in massive mirrors heated by high-power laser-beams. *Journal de Physique* 51, 1267–1282.
- Hsu, P., Yang, Y., Chen, C., 2000. A three-dimensional inverse problem of estimating the surface thermal behavior of the working roll in rolling process. *Journal of Manufacturing Science and Engineering-Transactions of the ASME* 122, 76–82.
- Huang, C., Ju, T., Tseng, A., 1995. The estimation of surface thermal-behavior of the working roll in hot-rolling process. *International Journal Of Heat And Mass Transfer* 38, 1019–1031.
- Iserles, A., 2011. A fast and simple algorithm for the computation of legendre coefficients. *Numerische Mathematik* 117, 529–553.
- Jeswiet, J., Rice, W., 1982. The design of a sensor for measuring normal pressure and friction stress in the roll gap during cold rollin, in : *Tenth north american manufacturing research conference proceedings*, pp. 130–134.
- Jiang, Z., Tieu, A., 2001. Modeling of the rolling processes by a 3-D rigid plastic/ visco-plastic finite element method with shifted ICCG method. *Comput Struct* 40, 79–2727.
- Keanini, K., 1998. Inverse estimation of surface heat flux distributions during high speed rolling using remote thermal measurements. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 41, 275–285.
- Kotrbacek, P., Raudensky, M., Horsky, J., Pohanka, M., 2006. Experimental study of heat transfer in hot rolling. *Revue de Metallurgie-Cahiers d'Informations Techniques* 103, 333–341. *ATS International Steelmaking Conference*, Paris, France, dec 15-16, 2005.
- Kudryavtsev, Y., 1966. *Unsteady state heat transfer*. Iliffe, London. pp. 36–39.
- Kutrunov, V., 1992. The quaternion method of regularizing integral equations of the theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 56, 765 – 770.
- Lagergren, J., Arentoft, M., Henningsten, P., Wahneim, T., Jonsson, N., Nylander, J., Ederth, J., 2006. New roll gap measurements of the friction conditions and the normal pressure distribution in cold flat rolling, in : *Ninth international steel rolling conference*, Paris la defense.
- Lanczos, C., 1961. *Linear differential operators*. Van Nostran, Londres and New York.
- Legrand, N., Labbe, N., Weisz-Patrault, D., Ehrlicher, A., Horsky, J., Luks, T., 2012a. Analysis of roll gap heat transfers in hot steel strip rolling through roll temperature sensors and heat transfer models. *Key Engineering Materials* 504-506, 1043–1048.
- Legrand, N., Lavalard, T., Martins, A., 2010. New concept of friction sensor for strip rolling : theoretical analysis, in : *International Congress on Tribology of Material Processes*, P Montmitonnet ed, Nice, France.
- Legrand, N., Lavalard, T., Martins, A., 2012b. New concept of friction sensor for strip rolling : Theoretical analysis. *Wear* 286-287, 8 – 18. *Tribology in Manufacturing Processes*.

- Li, C.S., Yu, H.L., Deng, G.Y., Liu, X.H., Wang, G.D., 2007. Numerical simulation of temperature field and thermal stress field of work roll during hot strip rolling. *Journal of Iron and Steel Research International* 14, 18–21.
- Liu, C., Tieu, A., Ma, B., Jiang, Z., 2002. Friction measurement in hot rolling of steel, in : 44th MWSP Conference, Orlando.
- Loulou, T., Artioukhine, E., 2006. Numerical solution of 3D unsteady nonlinear inverse problem of estimating surface heat flux for cylindrical geometry. *Inverse problems in science and engineering* 14, 39–52.
- Love, A., 1944. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York. 4th edition.
- Lu, J.k., 1995. *Complexe variable methods in plane elasticity*. volume 22 of *Series in pure mathematics*. World scientific, Singapore.
- Mandal, B., N., M., 1999. *Advances in dual integral equations*. Research notes in mathematics, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- Meierhofer, D., Stelson, K., 1987. Measurement of the interfacial stresses in rolling using the elastic deformation of the roll. *Journal of engineering for industry* 109, 362–369.
- Montmitonnet, P., 2006. Hot and cold strip rolling processes. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 195, 6604–6625.
- Montmitonnet, P., Stephany, A. and Cassarini, S., Ponthot, J., Laugier, M., Legrand, N., 2007. Modeling of metal forming lubrication by o/w emulsions, in : *Int. Conf. Trib. Mat. Proc.*, Yokohama. pp. 85–90.
- Muskhelishvili, N., 1953. *Singular integral equations : boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. Dover, New York. Redited (2008).
- Muskhelishvili, N., 1977. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff International Publishing, Groningen. First edition (1953).
- Ogaki, Y., Nakajima, N., 1983. Stress analysis of a circular cylinder of finite length subjected to loads symmetrical to middle plane and to axis of revolution. *The science and engineering review of Doshisha University* 23, 195–205.
- Penrose, R., 2004. *The road to reality. A complete guide to the laws of the universe*. Jonathan Cape, London.
- Pham, T., 1967. Potentiels élastiques, tenseurs de Green et de Neumann [Elastic potentials, Green and Neumann tensors]. Gauthier-Villars, Paris. In french.
- Polyanin, A., Manzhirov, A., 2008. *Handbook of integral equations*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- Raynaud, M., Bransier, J., 1986. A new finite-difference method for the nonlinear inverse heat conduction problem. *Numerical Heat Transfer* 9, 27–42.
- Saboonchi, A., Abbaspour, M., 2004. Changing the geometry of water spray on milling work roll and its effect on work roll temperature. *Journal of Materials Processing Technology* 148, 35–49.
- Saint-Venant, A., 1855. *Memoire sur la torsion des prismes*. *Compte rendu de l'Academie des Sciences* 14, 233–560.
- Saito, H., 1952. The axially symmetrical deformation of a short cylinder. *Transaction of the JSME* 18, 21–28.
- Scarpa, F., Milano, G., 1995. Kalman smoothing technique applied to the inverse heat conduction problem. *Numerical Heat Transfer* 28, 79–96.
- Schnur, D., Zabaras, N., 1990. Finite element solution of two-dimensional inverse elastic problems using spatial smoothing. *International Journal For Numerical Methods In Engineering* 30, 57–75.

- Sneddon, I., 1966. Mixed boundary value problems in potential theory. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Sneddon, I., Lowengrub, M., 1969. Crack problems in the classical theory of elasticity. The SIAM series in applied mathematics, John Wiley, New York.
- Stein, M., Weiss, G., 1971. Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces. Princeton University Press, New Jersey.
- Stelson, K., 1983. A new method to measure normal pressure and frictional stresses in the roll gap during cold rolling, in : Eleventh north american metalworking research conference proceedings, pp. 259–264.
- Tavares, R., Isac, M., Hamel, F., Guthrie, R., 2001. Instantaneous interfacial heat fluxes during the 4 to 8 m/min casting of carbon steels in a twin-roll caster. Metallurgical and Materials Transactions B-Process Metallurgy and Materials Processing Science 32, 55–67.
- Tsalik, A., 1995. Quaternionic representation of the 3d elastic and thermoelastic boundary problems. Mathematical Methods in the Applied Sciences 18, 697 – 708.
- Tseng, A., 1984. Finite difference solutions for heat transfer in a roll rotating at high speed. Numerical Heat-Transfer 7, 113–125.
- Tseng, A., Chang, J., Raudensky, M., Horsky, J., 1995. An Inverse Finite-Element Evaluation of Roll Cooling in Hot-Rolling of Steels. Journal of Materials Processing & Manufacturing Science 3, 387–408.
- Tseng, A., Lin, F., Gunderia, A., Ni, D., 1989. Roll cooling and its relationship to roll life. Metallurgical Transactions A-Physical Metallurgy And Materials Science 20, 2305–2320.
- Tseng, A., Tong, S., Maslen, S., Mills, J., 1990. Thermal behavior of aluminium rolling. Journal of Heat Transfer 112, 301–307.
- Vekua, N., 1964. Systems of singular integral equations. Noordhoff International Publishing, Groningen.
- Wang, M., Yang, H., Sun, Z., Guo, L., 2009. Analysis of coupled mechanical and thermal behaviors in hot rolling of large rings of titanium alloy using 3d dynamic explicit fem. Journal of Materials Processing Technology 209, 3384 – 3395.
- Watson, G., 1944. A treatise on the theory of bessel functions. Cambridge University Press, Cambridge.
- Weisz-Patrault, D., Ehrlacher, A., Legrand, N., 2011. A new sensor for the evaluation of contact stress by inverse analysis during steel strip rolling. Journal of Materials Processing Technology 211, 1500–1509.
- Weisz-Patrault, D., Ehrlacher, A., Legrand, N., 2012a. Evaluation of temperature field and heat flux by inverse analysis during steel strip rolling. International Journal of Heat and Mass Transfer 55, 629–641.
- Weisz-Patrault, D., Ehrlacher, A., Legrand, N., 2013a. Analytical inverse solution for coupled thermoelastic problem for the evaluation of contact stress during steel strip rolling. Applied Mathematical Modelling 37, 2212–2229.
- Weisz-Patrault, D., Ehrlacher, A., Legrand, N., 2013b. Evaluation of contact stress during rolling process, by three-dimensional analytical inverse method. International Journal of Solids and Structures (Submission).
- Weisz-Patrault, D., Ehrlacher, A., Legrand, N., 2013c. Fast evaluation of temperature and heat flux during rolling process, by three-dimensional analytical inverse method. International Journal of Thermal Sciences (Submission).
- Weisz-Patrault, D., Ehrlacher, A., Legrand, N., Labbe, N., Horsky, J., Luks, T., 2012b. Experimental study of interfacial heat flux and surface temperature by inverse analysis with thermocouple (fully embedded) during hot steel strip rolling. Advanced Materials Research 452-453, 959–953.

- Wijk, G., 1980. The point load test for the tensile strength of rocks. *Geotechnical Testing Journal* 3, 49–54.
- Yger, A., 2001. Analyse complexe et distributions. *Mathématiques pour le second cycle*, Ellipses, Paris.
- Zhang, G., Xiao, H., Wang, C., 2006. Three-Dimensional Model for Strip Hot Rolling. *Journal of Iron and Steel Research, International* 13, 23–26.
- Zhang, H., Nie, C., Xiong, Y., Xie, D., Yu, Y., 2012. Approximate analytical models of temperature and thermal stresses for 2d axis-symmetry object with temperature-dependent properties. *International Journal of Thermal Sciences* 53, 100–107.
- Zhang, X., Jiang, Z., Tieu, A., Liu, X., Wang, G., 2002. Numerical modelling of the thermal deformation of CVC roll in hot strip rolling. *Journal of Materials Processing Technology* 130, 219–223.
- Zone-Ching, L., Chang-Cheng, C., 1995. Three-dimensional heat-transfer and thermal-expansion analysis of the work roll during rolling. *Journal of Materials Processing Technology* 49, 125–147.